

- 34.** Calcule $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$.
- *35.** Sea T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Calcule la integral $\iint_T e^{(y-x)/(y+x)} dA$:
- Mediante transformación en coordenadas polares.
 - Utilizando la transformación $u = y - x$, $v = y + x$.
- 36.** Utilice el método del Ejemplo 7 para calcular el área de la región que está dentro de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y por encima de la recta $2x + 3y = 6$.
- *37. (La función error)** La función error $\text{Erf}(x)$ se define para $x \geq 0$ como
- $$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
- Demuestre que $(\text{Erf}(x))^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} (1 - e^{-x^2/\cos^2 \theta}) d\theta$.
- A partir de aquí, deduzca que $\text{Erf}(x) \geq \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.
- *38. (Las funciones gamma y beta)** La función gamma $\Gamma(x)$ y la función beta $B(x, y)$ se definen como
- $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0)$$
- $$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0)$$
- La función gamma cumple
- $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad y$$
- $$\Gamma(n+1) = n!, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
- Deduzca las siguientes propiedades de estas funciones:
- $\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds, \quad (x > 0)$
 - $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
 - Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces
- $$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta$$
- $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

14.5 Integrales triples

Ahora que ya sabemos cómo extender la integración definida a dominios bidimensionales, la extensión a dominios de tres (o más) dimensiones es directa. Dada una función acotada $f(x, y, z)$ definida en una caja rectangular B ($x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$), la integral triple de f en B ,

$$\iiint_B f(x, y, z) dV \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$

se puede definir como un límite adecuado de sumas de Riemann correspondientes a particiones de B en subcajas utilizando planos paralelos a cada uno de los planos coordenados. Omitiremos los detalles. Las integrales triples en dominios más generales se definen extendiendo la función para que sea cero fuera del dominio e integrando en una caja rectangular que contenga al dominio.

Todas las propiedades de las integrales dobles mencionadas en la Sección 14.1 tienen sus propiedades análogas para integrales triples. En particular, una función continua es integrable en un dominio cerrado y acotado. Si $f(x, y, z) = 1$ en el dominio D , entonces la integral triple da el volumen de D :

$$\text{Volumen de } D = \iiint_D dV$$

La integral triple de una función positiva $f(x, y, z)$ se puede interpretar como el «hipervolumen» (es decir, el volumen tetradsimensional) de una región del espacio de cuatro dimensiones que tiene como «base» el conjunto tridimensional D y como tope la hipersuperficie $w = f(x, y, z)$. Ésta no es una interpretación particularmente útil; en las aplicaciones surgen otras mucho más útiles. Por ejemplo, si $\delta(x, y, z)$ representa la densidad (masa por unidad de volumen) en la posición

(x, y, z) de una sustancia que ocupa un dominio D en el espacio tridimensional, entonces la masa m del sólido es la «suma» de los elementos de masa $dm = \delta(x, y, z) dV$ que ocupan los elementos de volumen dV :

$$\text{masa} = \iiint_D \delta(x, y, z) dV$$

Algunas integrales triples se pueden calcular por simple inspección, utilizando simetría y volúmenes conocidos.

Ejemplo 1 Calcule

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} (2 + x - \operatorname{sen} z) dV$$

Solución El dominio de integración es la bola de radio a centrada en el origen. La integral de 2 en esta bola es dos veces el volumen de dicha bola, es decir, $8\pi a^3/3$. Las integrales de x y $\operatorname{sen} z$ en la bola son ambas cero, ya que las dos funciones son impares en sus variables, y el dominio es simétrico respecto a cada plano coordenado (por ejemplo, para cada elemento de volumen dV en la mitad de la bola donde $x > 0$, existe un elemento correspondiente en la otra mitad donde x tiene el mismo tamaño pero signo opuesto, de forma que las contribuciones de esos dos elementos se cancelan entre sí). Por tanto,

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} (2 + x - \operatorname{sen} z) dV = \frac{8}{3} \pi a^3 + 0 + 0 = \frac{8}{3} \pi a^3$$

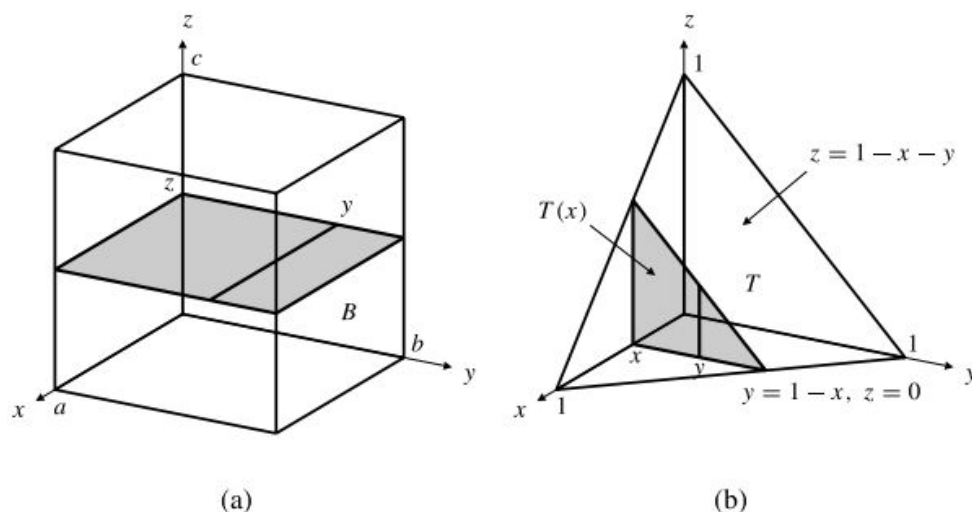
La mayoría de las integrales triples se evalúan mediante un procedimiento de iteración similar al utilizado para integrales dobles. Vamos trasladando en el dominio D secciones de un plano paralelo a uno de los planos coordenados, realizando la integral doble de la función con respecto a las dos variables de esa sección, y después integrando el resultado con respecto a la variable restante. Algunos ejemplos ayudarán a aclarar el procedimiento.

Ejemplo 2 Sea B la caja rectangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$. Calcule

$$I = \iiint_B (xy^2 + z^3) dV$$

Solución Como se indica en la Figura 14.35(a), tomaremos secciones con planos perpendiculares al eje z , de forma que la integral en z será la más externa en la iteración. Las secciones son rectángulos, por lo que las integrales dobles en ellos se pueden iterar también de forma inmediata. Escogeremos la integral externa en y , y la integral interna en x , como sugiere la recta que se muestra en la sección.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^a (xy^2 + z^3) dx \\ &= \int_0^c dz \int_0^b dy \left(\frac{x^2 y^2}{2} + xz^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=a} \\ &= \int_0^c dz \int_0^b \left(\frac{a^2 y^2}{2} + az^3 \right) dy \\ &= \int_0^c dz \left(\frac{a^2 y^3}{6} + ayz^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=b} \\ &= \int_0^c \left(\frac{a^2 b^3}{6} + abz^3 \right) dz \\ &= \left(\frac{a^2 b^3 z}{6} + \frac{abz^4}{4} \right) \Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{a^2 b^3 c}{6} + \frac{abc^4}{4} \end{aligned}$$

**Figura 14.35**

(a) La iteración del Ejemplo 2.
(b) La iteración del Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Si T es el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, calcule

$$I = \iiint_T y \, dV$$

Solución La Figura 14.35(b) muestra el tetraedro. La sección plana en el plano normal al eje x en la posición x es el triángulo $T(x)$, que se muestra en dicha figura; en la sección, x es constante e y y z son variables. La doble integral de y en $T(x)$ es función de x . La calcularemos integrando primero en la dirección de z y después en la dirección de y , como sugiere la recta vertical que se muestra en la sección:

$$\begin{aligned} \iint_{T(x)} y \, dA &= \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y \, dz \\ &= \int_0^{1-x} y(1-x-y) \, dy \\ &= \left((1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{6} (1-x)^3 \end{aligned}$$

El valor de la integral triple I es la integral de esta expresión con respecto a la variable restante x , para sumar las contribuciones de todas las secciones entre $x = 0$ y $x = 1$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{6} (1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{24} (1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

En la solución anterior hemos realizado la integración en dos pasos para mostrar claramente el procedimiento. En la práctica, las integrales triples se iteran en un paso, sin hacer mención explícita de la integral doble en la sección. Por tanto, utilizando la iteración sugerida por la Figura 14.35(b), podríamos escribir inmediatamente

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y \, dz$$

El cálculo procede como antes, comenzando por la integral de la derecha (es decir, la interna), seguida por la integral del medio y después por la integral de la izquierda (exterior). La integral triple representa la «suma» de elementos $y \, dV$ en la región tridimensional T . La iteración anterior corresponde a «sumar» (es decir, integrar) primero a lo largo de una recta vertical (la integral en z), sumar después esas sumas unidimensionales en la dirección de y para obtener la suma doble de todos los elementos en el plano de la sección, y sumar finalmente esas sumas dobles en la

dirección de x para incorporar las contribuciones de todas las secciones. La iteración se puede realizar en otras direcciones; existen seis posibles iteraciones correspondientes a los órdenes diferentes de realización de las integrales en x , y y z . Las otras cinco son

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} y dy$$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-x-y} y dz$$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-y-z} y dx$$

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} y dy$$

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} y dx$$

Es conveniente verificarlas dibujando diagramas análogos a la Figura 14.35(b). Por supuesto, las seis iteraciones producen el mismo resultado.

Algunas veces es difícil visualizar la región del espacio tridimensional donde se realiza una integral triple dada. En esas situaciones es útil intentar determinar la *proyección* de esa región en uno de los planos coordenados. Por ejemplo, si una región R está limitada por dos superficies con ecuaciones dadas, al combinar estas ecuaciones para eliminar una variable se llegará a la ecuación de un cilindro (no necesariamente circular) con ejes paralelos al eje de la variable eliminada. Este cilindro determinará entonces la proyección de R en el plano coordenado perpendicular a ese eje. El ejemplo que sigue ilustra el uso de esta técnica para calcular el volumen limitado por dos superficies. El volumen se expresa como una integral triple con integrando unidad.

Ejemplo 4 Calcule el volumen de la región R que está por debajo del plano $z = 3 - 2y$ y por encima del paraboloides $z = x^2 + y^2$.

Solución La región R se muestra en la Figura 14.36. Las dos superficies que limitan a R se cortan en el cilindro vertical $x^2 + y^2 = 3 - 2y$, o $x^2 + (y + 1)^2 = 4$. Si D es el disco circular en el que el cilindro corta al plano xy , entonces la integración parcial produce

$$V = \iiint_R dV = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz$$

La Figura 14.36 muestra una sección de R correspondiente a una iteración posterior de la integral doble en D :

$$V = \int_{-3}^1 dy \int_{-\sqrt{3-2y-y^2}}^{\sqrt{3-2y-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz$$

pero existe una forma más fácil de iterar la integral doble. Como D es un disco circular de radio 2 y centro $(0, -1)$, podemos utilizar coordenadas polares con centro en ese punto (es decir, $x = r \cos \theta$, $y = -1 + r \sin \theta$). Así,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_D (4 - x^2 - (y + 1)^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8\pi \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

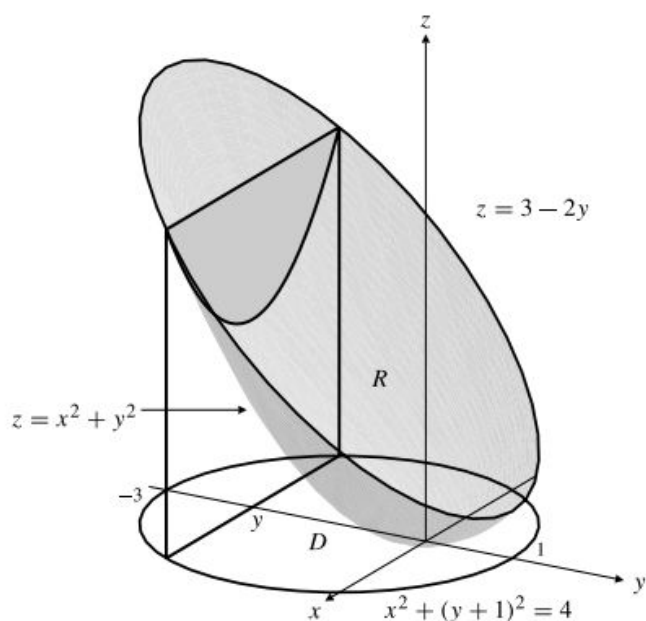


Figura 14.36 Volumen sobre un paraboloide y por debajo de un plano inclinado.

Como en el caso de integrales dobles, algunas veces es necesario reiterar una integral iterada dada, de forma que las iteraciones se realicen en un orden diferente. Esta tarea se realiza más fácilmente si podemos expresar la iteración dada en un dibujo en la región de integración. La capacidad de deducir la forma de la región a partir de los límites en la integral iterada es algo que se puede adquirir con un poco de práctica. Se debe determinar primero la proyección de la región en un plano coordenado, concretamente, el plano de las dos variables de las integrales externas de la iteración dada.

Es también posible reiterar una integral iterada en un orden diferente manejando algebraicamente los límites de integración. Ilustraremos ambos enfoques (gráfico y algebraico) en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5 Expresé la integral iterada

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_0^z f(x, y, z) dx$$

como una integral triple y dibuje la región donde se realiza. Reitere la integral de forma que las interacciones se realicen en el orden: primero y , después z , después x (es decir, el orden opuesto a la iteración dada).

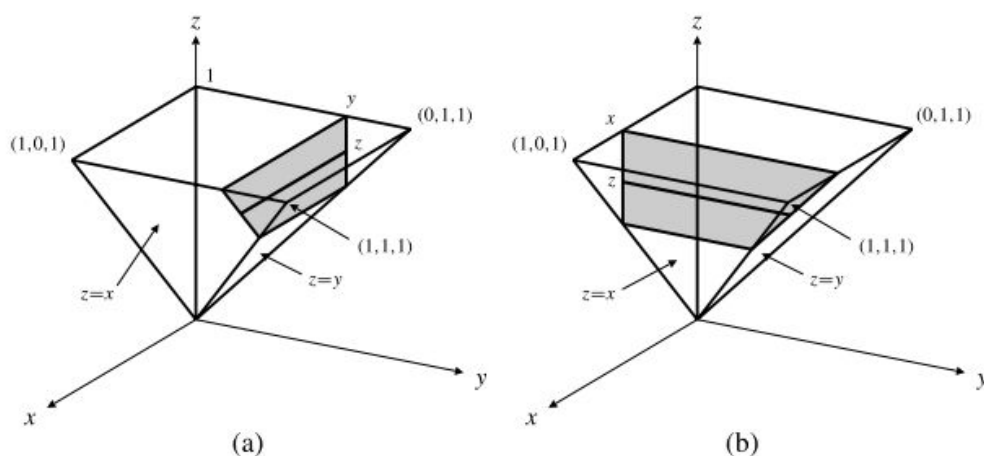
Solución Expresaremos I como una integral triple no iterada:

$$I = \iiint_R f(x, y, z) dV$$

La integral externa en la iteración dada muestra que la región R está entre los planos $y = 0$ e $y = 1$. Para cada valor de y , z debe estar entre y y 1. Por tanto, R está por debajo del plano $z = 1$ y por encima del plano $z = y$, y la proyección de R en el plano yz es un triángulo cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$. En cualquier punto $(0, y, z)$ del triángulo, una recta paralela al eje x corta a R entre $x = 0$ y $x = z$. Por tanto, el sólido está limitado por los cinco planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $y = z$ y $z = x$, como se puede ver en la Figura 14.37(a), donde se muestra una sección y la línea correspondiente a la iteración dada.

La iteración requerida corresponde a la sección y a la línea que se muestran en la Figura 14.37(b). Por tanto, es

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^z f(x, y, z) dy$$

**Figura 14.37**

- (a) La región sólida de la integral triple del Ejemplo 5 con una sección correspondiente a la iteración dada.
 (b) El mismo sólido con una sección conforme a la iteración deseada.

Ejemplo 6 Utilice álgebra para expresar una iteración de la integral

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x, y, z) dz$$

con el orden de iteraciones invertido.

Solución A partir de la iteración dada podemos expresar tres conjuntos de inecuaciones satisfechas por la variable externa x , la variable intermedia y y la variable interna z . Las escribiremos en orden como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 && \text{inecuaciones para } x \\ x &\leq y \leq 1 && \text{inecuaciones para } y \\ x &\leq z \leq y && \text{inecuaciones para } z \end{aligned}$$

Nótese que los límites de cada variable pueden ser constantes o pueden depender solamente de variables cuyas inecuaciones estén por encima de la línea de esa variable (en este caso, los límites de x deben ser constantes, los de y pueden depender de x , y los de z pueden depender de x y de y). Esto es un requisito de las integrales iteradas. Las integrales externas no pueden depender de las variables de integración de las integrales internas.

Deseamos construir un conjunto equivalente de inecuaciones donde z esté en la línea superior, después estén las de y , y finalmente las de x en la línea inferior. Los límites de z deben ser constantes. A partir de las inecuaciones anteriores determinamos que $0 \leq x \leq z$ y $z \leq y \leq 1$. Por tanto, z debe cumplir $0 \leq z \leq 1$. Las inecuaciones de y pueden depender de z . Como $z \leq y$ e $y \leq 1$, tenemos que $z \leq y \leq 1$. Finalmente, los límites de x pueden depender de y y de z . Tenemos que $0 \leq x$, $x \leq y$ y $x \leq z$. Como ya hemos determinado que $z \leq y$, debemos tener que $0 \leq x \leq z$. Por tanto, las nuevas inecuaciones son

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 1 && \text{inecuaciones para } z \\ z &\leq y \leq 1 && \text{inecuaciones para } y \\ 0 &\leq x \leq z && \text{inecuaciones para } x \end{aligned}$$

y la iteración pedida es

$$I = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^z f(x, y, z) dx$$

Ejercicios 14.5

En los Ejercicios 1-12, calcule las integrales triples en las regiones indicadas. Esté atento a las simplificaciones y a los órdenes de integración favorables.

1. $\iiint_R (1 + 2x - 3y) dV$, en la caja $-a \leq x \leq a$,
 $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$.

2. $\iiint_B xyz \, dV$, en la caja B dada por $0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 0$, $1 \leq z \leq 4$.
3. $\iiint_D (3 + 2xy) \, dV$, sobre el domo hemisférico sólido D dado por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ y $z \geq 0$.
4. $\iiint_R x \, dV$, en el tetraedro delimitado por los planos coordenados y el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
5. $\iiint_R (x^2 + y^2) \, dV$, en el cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.
6. $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, en el cubo del Ejercicio 5.
7. $\iiint_R (xy + z^2) \, dV$, en el conjunto $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$.
8. $\iiint_R yz^2 e^{-xyz} \, dV$, en el cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.
9. $\iiint_R \sin(\pi y^3) \, dV$, en la pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 1)$.
10. $\iiint_R y \, dV$, en la parte del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ que está por encima del plano $y + z = 1$ y por debajo del plano $x + y + z = 2$.
11. $\iiint_R \frac{1}{(x + y + z)^3} \, dV$, en la región limitada por los seis planos $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$, $y = z$, $x = 0$ y $x = y + z$.
12. $\iiint_R \cos x \cos y \cos z \, dV$, en el tetraedro definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y $x + y + z \leq \pi$.
13. Calcule $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2} \, dV$. *Sugerencia:* Utilice el resultado del Ejemplo 4 de la Sección 14.4.
14. Calcule el volumen de la región que está dentro del cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$, por encima del plano xy y por debajo del plano $z = 2 + x$.
15. Calcule $\iiint_T x \, dV$, siendo T el tetraedro limitado por los planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y $x + y + z = 2$.
16. Dibuje la región R en el primer octante del espacio tridimensional que tiene un volumen finito y está limitada por las superficies $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ y

$z = y^2$. Escriba seis iteraciones diferentes de la integral triple de $f(x, y, z)$ en R .

En los Ejercicios 17-20, exprese las integrales iteradas dadas como integrales triples y dibuje la región donde se calculan. Vuelva a iterar las integrales, de forma que la integral más externa sea con respecto a x y la más interna con respecto a z .

$$*17. \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^1 f(x, y, z) \, dx$$

$$*18. \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f(x, y, z) \, dx$$

$$*19. \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{x-z} f(x, y, z) \, dy$$

$$*20. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_{y^2+z^2}^1 f(x, y, z) \, dx$$

21. Repita el Ejercicio 17 utilizando el método del Ejemplo 6.

22. Repita el Ejercicio 18 utilizando el método del Ejemplo 6.

23. Repita el Ejercicio 19 utilizando el método del Ejemplo 6.

24. Repita el Ejercicio 20 utilizando el método del Ejemplo 6.

25. Repita el Ejemplo 5 utilizando el método del Ejemplo 6.

26. Repita el Ejemplo 6 utilizando el método del Ejemplo 5.

En los Ejercicios 27 y 28, calcule las integrales iteradas dadas volviendo a iterarlas en un orden diferente (necesitará realizar un buen dibujo de la región).

$$*27. \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^x e^{x^3} \, dy$$

$$*28. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_y^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)} \, dz$$

29. Defina el valor medio de una función integrable $f(x, y, z)$ en una región R del espacio tridimensional. Calcule el valor medio de $x^2 + y^2 + z^2$ en el cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

*30. Enuncie un Teorema del Valor Medio para integrales triples análogo al Teorema 3 de la Sección 14.3. Utilícelo para demostrar que si $f(x, y, z)$ es continua cerca del punto (a, b, c) y si $B_\epsilon(a, b, c)$ es la bola de radio ϵ centrada en (a, b, c) , entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iiint_{B_\epsilon(a, b, c)} f(x, y, z) \, dV = f(a, b, c)$$

14.6 Cambio de variables en integrales triples

La fórmula del cambio de variables para integrales dobles se puede extender a integrales triples (y de orden superior). Consideremos la transformación

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

donde x, y y z tienen derivadas parciales primeras continuas con respecto a u, v y w . Cerca de cualquier punto donde el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ sea distinto de cero, la transformación escala los elementos de volumen de acuerdo con la fórmula

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Por tanto, si la transformación es uno a uno de un dominio S en el espacio uvw en un dominio D en el espacio xyz , y si

$$g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

entonces

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S g(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

La demostración es similar a la del caso bidimensional, dada en la Sección 14.4. Véase el Ejercicio 35 posterior.

Ejemplo 1 Mediante el cambio de variables $x = au, y = bv, z = cw$, con $a, b, c > 0$, el elipsoide sólido E dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

se transforma en la bola B dada por $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. El jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

por lo que el volumen del elipsoide se expresa como

$$\begin{aligned} \text{Volumen de } E &= \iiint_E dx dy dz \\ &= \iiint_B abc du dv dw = abc \times (\text{Volumen de } B) \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas

Entre las alternativas más útiles a las coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional están dos sistemas de coordenadas que generalizan las coordenadas polares en el plano. El más simple

de ellos es el sistema de **coordenadas cilíndricas**. En este sistema se utilizan coordenadas polares ordinarias en el plano xy , y se retiene la coordenada cartesiana z para medir distancias verticales. Por tanto, un punto en el espacio tridimensional tendrá coordenadas cilíndricas $[r, \theta, z]$, relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) mediante la transformación

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

La Figura 14.38 muestra un punto P localizado mediante sus coordenadas cilíndricas $[r, \theta, z]$ y también mediante sus coordenadas cartesianas (x, y, z) . Nótese que la distancia a P desde el origen es

$$d = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplo 2 El punto con coordenadas cartesianas $(1, 1, 1)$ tiene coordenadas cilíndricas $[\sqrt{2}, \pi/4, 1]$. El punto con coordenadas cartesianas $(0, 2, -3)$ tiene coordenadas cilíndricas $[2, \pi/2, -3]$. El punto con coordenadas cilíndricas $[4, -\pi/3, 5]$ tiene coordenadas cartesianas $(2, -2\sqrt{3}, 5)$.

Las superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas son las superficies r (cilindros circulares verticales centrados en el eje z), las superficies θ (semitplanos verticales con límite en el eje z) y las superficies z (planos horizontales) (véase la Figura 14.39). Las coordenadas cilíndricas son adecuadas para representar dominios limitados por este tipo de superficies y, en general, en problemas con simetría axial (respecto al eje z).

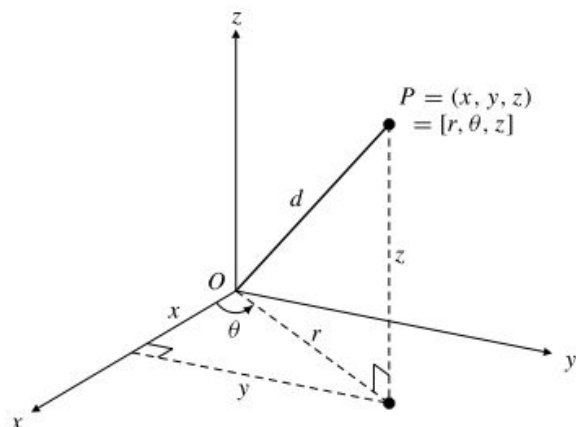


Figura 14.38 Coordenadas cilíndricas de un punto.

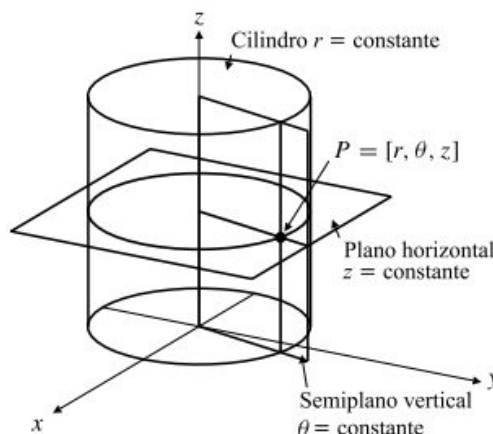


Figura 14.39 Superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas.

El **elemento de volumen en coordenadas cilíndricas** es

$$dV = r dr d\theta dz$$

como se puede apreciar fácilmente examinando la «caja» infinitesimal limitada por las superficies coordenadas correspondientes a los valores $r, r + dr, \theta, \theta + d\theta, z$ y $z + dz$ (véase la Figura 14.40) o calculando el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

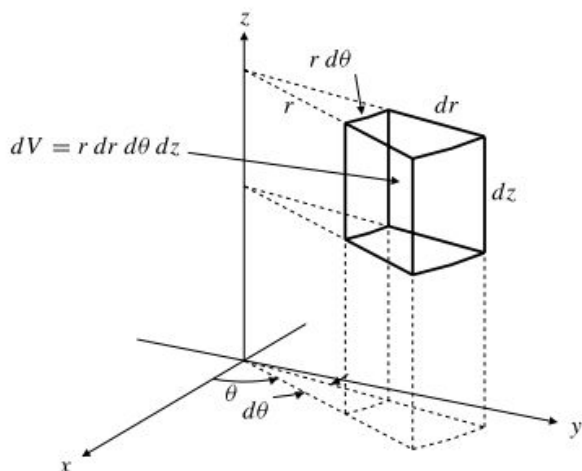


Figura 14.40 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 3 Calcule $\iiint_D (x^2 + y^2) dV$ en la región del primer octante limitada por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, y por los planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ y $x = y$.

Solución En términos de coordenadas cilíndricas la región está acotada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$, $z = 0$ y $z = 1$ (véase la Figura 14.41). Es una caja coordenada rectangular en el espacio $r\theta z$. Como el integrando es $x^2 + y^2 = r^2$, la integral es

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dV &= \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^2 r dr \\ &= (1 - 0) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{15}{16} \pi \end{aligned}$$

Esta integral habría sido mucho más difícil de calcular en coordenadas cartesianas.

Ejemplo 4 Utilice una integral triple para calcular el volumen de la región sólida que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y por encima del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución La cuarta parte del volumen requerido está en el primer octante (véase la región R en la Figura 14.42). Las dos superficies se cortan en la superficie del cilindro vertical

$$6 - x^2 - y^2 = z^2 = (x^2 + y^2)^2$$

o, en términos de coordenadas cilíndricas, $6 - r^2 = r^4$, es decir,

$$r^4 + r^2 - 6 = 0$$

$$(r^2 + 3)(r^2 - 2) = 0$$

La única solución relevante a esta ecuación es $r = \sqrt{2}$. Por tanto, el volumen pedido está por encima del disco de radio $\sqrt{2}$, centrado en el origen, en el plano xy . El volumen total V de la región es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{6-r^2} - r^3) dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (6-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2\pi \left[\frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{8}{3} - 1 \right] = \frac{2\pi}{3} (6\sqrt{6} - 11) \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

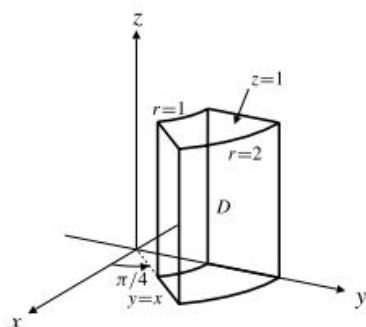


Figura 14.41

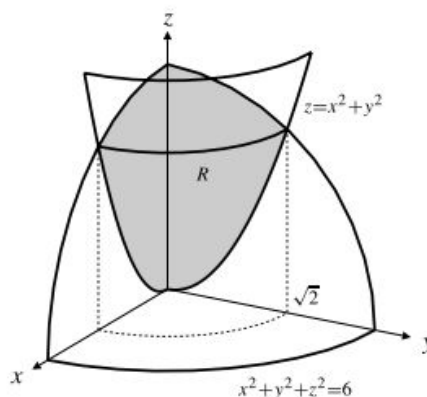


Figura 14.42

Coordenadas esféricas

En el sistema de **coordenadas esféricas** un punto P en el espacio tridimensional se representa por un triplete ordenado $[\rho, \phi, \theta]$, siendo ρ (letra griega «rho») la distancia desde P al origen, O , ϕ (letra griega «phi») es el ángulo que forma la recta radial OP con la dirección positiva del eje z , y θ es el ángulo que forman el plano que contiene a P y al eje z con el plano xz (véase la Figura 14.43). Por convenio, se restringen las coordenadas esféricas de forma que $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ (o $-\pi < \theta \leq \pi$). Todo punto que no esté en el eje z tendrá una única representación en coordenadas esféricas y, por tanto, la transformación de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas esféricas $[\rho, \phi, \theta]$ será uno a uno fuera del eje z . Utilizando los triángulos rectángulos que se muestran en la figura, podemos ver que esta transformación está dada por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

y que la coordenada r en coordenadas cilíndricas está relacionada con ρ y ϕ por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi$$

Por tanto, también tenemos

$$\tan \phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Si $\phi = 0$ o $\phi = \pi$, entonces $r = 0$, por lo que la coordenada θ es irrelevante en los puntos del eje z .

La Figura 14.44 muestra algunas superficies coordenadas en coordenadas esféricas. Las superficies ρ ($\rho = \text{constante}$) son esferas centradas en el origen; las superficies ϕ ($\phi = \text{constante}$) son conos circulares cuyo eje es el eje z ; las superficies θ ($\theta = \text{constante}$) son semiplanos verticales con un extremo en el eje z . Si tomamos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la tierra, el eje z que pase por el polo norte y el eje x que pase por la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador, entonces las intersecciones de la superficie de la tierra con las superficies ϕ son los *paralelos de latitud*, y las intersecciones con las superficies θ son los

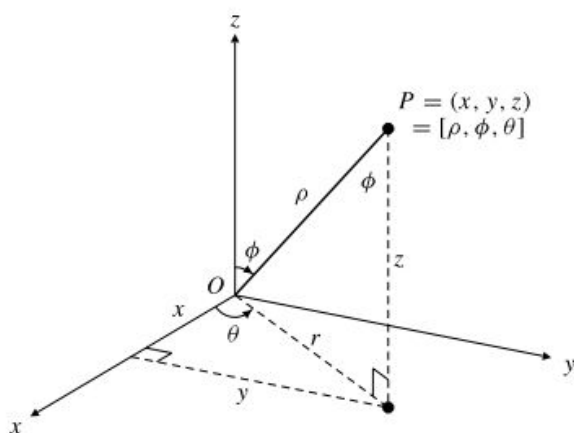


Figura 14.43 Coordenadas esféricas de un punto.

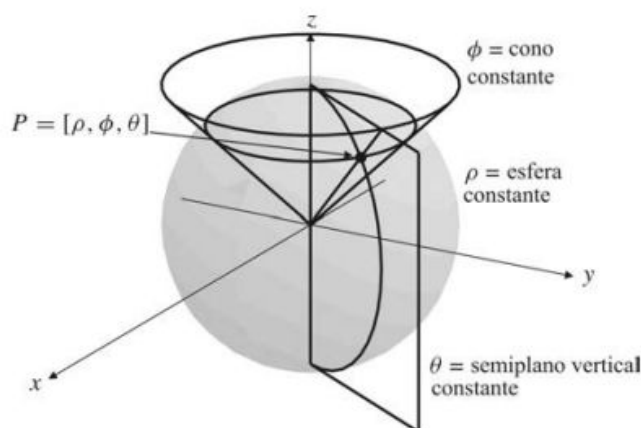


Figura 14.44 Superficies coordenadas en coordenadas esféricas.

meridianos de longitud. Como la latitud se mide desde 90° en el polo norte a -90° en el polo sur, y ϕ se mide desde cero en el polo norte hasta π ($= 180^\circ$) en el polo sur, la coordenada ϕ se denomina frecuentemente coordenada de **colatitud**; θ es la coordenada de **longitud**. Obsérvese que θ tienen la misma significación en coordenadas esféricas que en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 5 Calcule:

- Las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas esféricas son $[2, \pi/3, \pi/2]$.
- Las coordenadas esféricas del punto Q cuyas coordenadas cartesianas son $(1, 1, \sqrt{2})$.

Solución

- Si $\rho = 2$, $\phi = \pi/3$ y $\theta = \pi/2$, entonces

$$\begin{aligned}x &= 2 \operatorname{sen}(\pi/3) \cos(\pi/2) = 0 \\y &= 2 \operatorname{sen}(\pi/3) \operatorname{sen}(\pi/2) = \sqrt{3} \\z &= 2 \cos(\pi/3) = 1\end{aligned}$$

Las coordenadas cartesianas de P son $(0, \sqrt{3}, 1)$.

- Dado que

$$\begin{aligned}\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta &= x = 1 \\ \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta &= y = 1 \\ \rho \cos \phi &= z = \sqrt{2}\end{aligned}$$

calculamos que $\rho^2 = 1 + 1 + 2 = 4$, por lo que $\rho = 2$. Además, $r^2 = 1 + 1 = 2$, por lo que $r = \sqrt{2}$. Entonces, $\tan \phi = r/z = 1$, por lo que $\phi = \pi/4$. Además, $\tan \theta = y/x = 1$, por lo que $\theta = \pi/4$ o $5\pi/4$. Como $x > 0$, debemos tener $\theta = \pi/4$. Las coordenadas esféricas de Q son $[2, \pi/4, \pi/4]$.

Observación Podemos preguntarnos por qué las coordenadas esféricas se expresan en el orden ρ, ϕ, θ en vez de ρ, θ, ϕ . La razón, que veremos más clara en el Capítulo 16, es que la triada de vectores unitarios en cualquier punto P que apuntan en las direcciones de ρ, ϕ y θ crecientes forman una *base orientada a la derecha* en vez de orientada a la izquierda.

El **elemento de volumen en coordenadas esféricas** es

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Para ver que esto es así, observemos que las dimensiones de la caja coordenada infinitesimal limitada por las superficies coordenadas correspondientes a los valores $\rho, \rho + d\rho, \phi, \phi + d\phi, \theta$ y

$\theta + d\theta$ son $d\rho$, $\rho d\phi$ y $\rho \operatorname{sen} \phi d\theta$ (véase la Figura 14.45). También se puede calcular el jacobiano de la transformación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi \begin{vmatrix} \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &\quad + \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi (\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi) + \rho \operatorname{sen} \phi (\rho \operatorname{sen}^2 \phi) \\ &= \rho^2 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Las coordenadas esféricas son adecuadas en problemas con simetría esférica y, en particular, en regiones limitadas por esferas centradas en el origen, conos circulares cuyos ejes sean el eje z , y planos verticales que contengan al eje z .

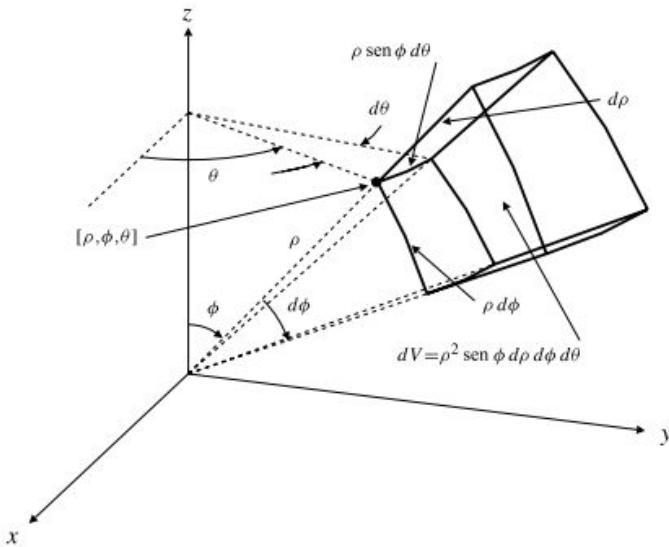


Figura 14.45 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Ejemplo 6 Una semibola sólida H de radio a tiene una densidad que depende de la distancia ρ al centro del disco de su base. La densidad se expresa como $k(2a - \rho)$, siendo k una constante. Calcule la masa de la semibola.

Solución Eligiendo un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la base, y de forma que la semibola esté por encima del plano xy , podemos calcular la masa m pedida como sigue:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_H k(2a - \rho) dV = \iiint_H k(2a - \rho) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi d\phi \int_0^a (2a - \rho) \rho^2 d\rho \\ &= 2k\pi \times 1 \times \left(\frac{2a}{3} \rho^3 - \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^a = \frac{5}{6} \pi k a^4 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Observación En el ejemplo anterior, tanto el integrando como la región de integración tienen simetría esférica, por lo que la elección de coordenadas esféricas para realizar la integración era lo más apropiado. La masa se podría haber calculado también en coordenadas cilíndricas. La iteración en este caso sería

$$m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} k(2a - \sqrt{r^2+z^2}) dz$$

y es difícil de calcular. En coordenadas cartesianas es aún más difícil:

$$m = 4 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} k(2a - \sqrt{x^2+y^2+z^2}) dz$$

La elección del sistema de coordenadas puede afectar grandemente a la dificultad de cálculo de una integral múltiple.

En muchos problemas aparecerán elementos con simetría axial y esférica. En tales casos puede no estar claro si es mejor utilizar coordenadas esféricas o cilíndricas. En estos casos dudosos, el integrando es en general la mejor guía. Se utilizarán coordenadas cilíndricas o esféricas si el integrando depende, respectivamente, de $x^2 + y^2$ o $x^2 + y^2 + z^2$.

Ejemplo 7 El momento de inercia respecto al eje z de un sólido con densidad δ que ocupa la región R está dado por la integral (véase la Sección 14.7)

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2) \delta dV$$

Calcule el momento de inercia de un sólido de densidad unidad que ocupa la región en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución Véase la Figura 14.46. Utilizando coordenadas esféricas el momento de inercia pedido es

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \phi d\phi \int_{a/\sin \phi}^{2a} \rho^2 \sin^2 \phi \rho^2 d\rho$$

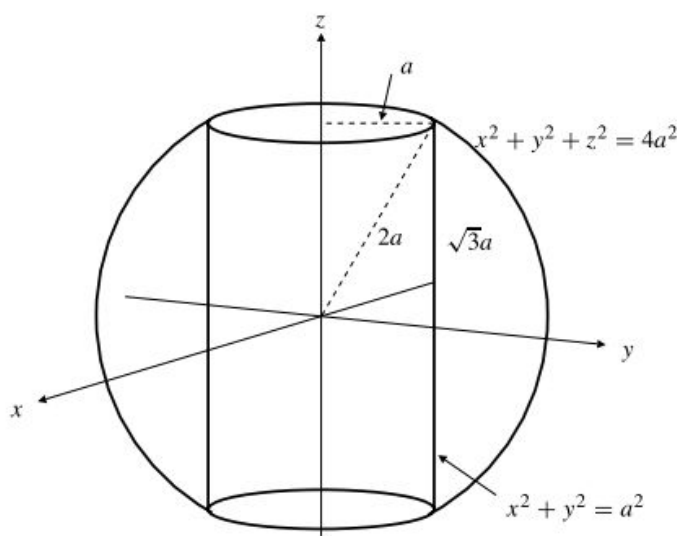


Figura 14.46 Una bola sólida con un agujero cilíndrico a través de ella.

Utilizando coordenadas cilíndricas es

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} r dr \int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2 dz$$

La última fórmula parece algo más fácil de evaluar. Continuaremos con ella. Calculando las integrales en θ y en z , obtenemos

$$I = 4\pi \int_a^{2a} r^3 \sqrt{4a^2 - r^2} dr$$

Haciendo el cambio $u = 4a^2 - r^2$, $du = -2r dr$, se llega a

$$I = 2\pi \int_0^{3a^2} (4a^2 - u) \sqrt{u} du = 2\pi \left(4a^2 \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^{3a^2} = \frac{44}{5} \sqrt{3} \pi a^5$$

Ejercicios 14.6

- Convierta las coordenadas esféricas $[4, \pi/3, 2\pi/3]$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas.
- Convierta las coordenadas cartesianas $(2, -2, 1)$ en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.
- Convierta las coordenadas cilíndricas $[2, \pi/6, -2]$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas.
- Las coordenadas esféricas de un punto P son $[1, \phi, \theta]$ y sus coordenadas cilíndricas son $[r, \pi/4, r]$. Calcule las coordenadas cartesianas de dicho punto.
- En el primer octante, entre los planos $y = 0$ e $y = x$ y dentro del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. *Sugerencia:* Utilice el cambio de variables sugerido en el Ejemplo 1.
- Limitada por el hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $z = -c$ y $z = c$.
- Por encima del plano xy y por debajo del paraboloide

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Describa los conjuntos de puntos del espacio tridimensional que satisfacen las ecuaciones de los Ejercicios 5-14. Aquí, r , θ , ρ y ϕ indican las coordenadas apropiadas cilíndricas o esféricas.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 5. $\theta = \pi/2$ | 6. $\phi = 2\pi/3$ |
| 7. $\phi = \pi/2$ | 8. $\rho = 4$ |
| 9. $r = 4$ | 10. $\rho = z$ |
| 11. $\rho = r$ | 12. $\rho = 2x$ |
| 13. $\rho = 2 \cos \phi$ | 14. $r = 2 \cos \theta$ |

En los Ejercicios 15-23, calcule los volúmenes de las regiones indicadas.

- En el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- Por encima de la superficie $z = (x^2 + y^2)^{1/4}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- Entre los paraboloides $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$.
- Dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.
- Por encima del plano xy , y dentro del cono $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.
- Por encima del plano xy , y debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y de la cuña $-x \leq y \leq \sqrt{3x}$.
- Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$, siendo R el cilindro $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.
- Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$, siendo B la bola dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.
- Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dV$, siendo B la bola del Ejercicio 25.
- Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$, siendo R la región que está por encima del cono $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2) dV$ en la región R del Ejercicio 27.
- Calcule $\iiint_R z dV$ en la región R que cumple $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.
- Calcule $\iiint_R x dV$ y $\iiint_R z dV$ en la parte de la semiesfera $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ está en el primer octante.

- *31. Calcule $\iiint_R x dV$ y $\iiint_R z dV$ en la parte del cono

$$0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)$$

que está en el primer octante.

- *32. Calcule el volumen de la región que está dentro del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y por encima del plano $z = b - y$.

- *33. Demuestre que en coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- *34. Demuestre que en coordenadas esféricas la ecuación de Laplace se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

- *35. Si x , y y z son funciones de u , v y w con derivadas parciales primeras continuas y jacobiano no nulo en (u, v, w) , demuestre que transforman un elemento de volumen infinitesimal en el espacio uvw , limitado por los planos coordenados u , $u + du$, v , $v + dv$, w y $w + dw$, en un «paralelepípedo» infinitesimal en el espacio xyz cuyo volumen es

$$dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Sugerencia: Adapte el argumento bidimensional dado en la Sección 14.4. ¿Qué tres vectores en el punto $P = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ generan el paralelepípedo?

14.7 Aplicaciones de las integrales múltiples

Cuando expresamos el volumen V de una región R en el espacio tridimensional mediante una integral,

$$V = \iiint_R dV$$

estamos considerando V como una «suma» de infinitos *elementos infinitesimales de volumen*, es decir, como el límite de la suma de volúmenes de subregiones no solapadas cada vez más pequeñas en las que subdividimos R . Esta idea de representar mediante integrales las sumas de elementos infinitesimales de magnitudes tiene muchas aplicaciones.

Por ejemplo, si un cuerpo rígido de densidad constante δ g/cm³ ocupa un volumen V cm³, entonces su masa es $m = \delta V$ g. Si la densidad no es constante sino que varía de forma continua en la región R del espacio tridimensional ocupada por el cuerpo rígido, es decir, $\delta = \delta(x, y, z)$, podemos considerar todavía que la densidad será constante en un elemento infinitesimal de R cuyo volumen sea dV . La masa de este elemento es, por tanto, $dm = \delta(x, y, z) dV$, y la masa del cuerpo completo se calcula integrando estos elementos de masa en R :

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z) dV$$

Se aplican fórmulas similares cuando el cuerpo rígido es unidimensional o bidimensional, y su densidad se expresa en unidades de masa por unidad de longitud o por unidad de área. En estos casos son necesarias integrales simples o dobles para sumar los elementos individuales de masa. Todo esto funciona porque la masa es «aditiva», es decir, la masa de un objeto compuesto es la suma de las masas de las partes que componen el objeto. Las áreas superficiales, fuerzas gravitacionales, momentos y energías que consideraremos en esta sección tienen esta propiedad de aditividad.

Área de la superficie de una gráfica

Podemos emplear una integral doble en un dominio D del plano xy para sumar elementos de área de superficie y, por tanto, calcular el área total de la superficie \mathcal{S} cuya ecuación es $z = f(x, y)$, definida para (x, y) en D . Suponemos que f tiene derivadas parciales primeras continuas en D , de forma que \mathcal{S} es suave y tiene planos tangentes no verticales en $P = (x, y, f(x, y))$ para todo (x, y) en D . El vector

$$\mathbf{n} = -f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

es normal a \mathcal{S} en P , y apunta hacia arriba. Un elemento de área dA situado en la posición (x, y) del plano xy tiene una *proyección vertical* en \mathcal{S} cuya área dS es $\sec \gamma$ multiplicada por el área dA , siendo γ el ángulo que forman \mathbf{n} y \mathbf{k} (véase la Figura 14.47).

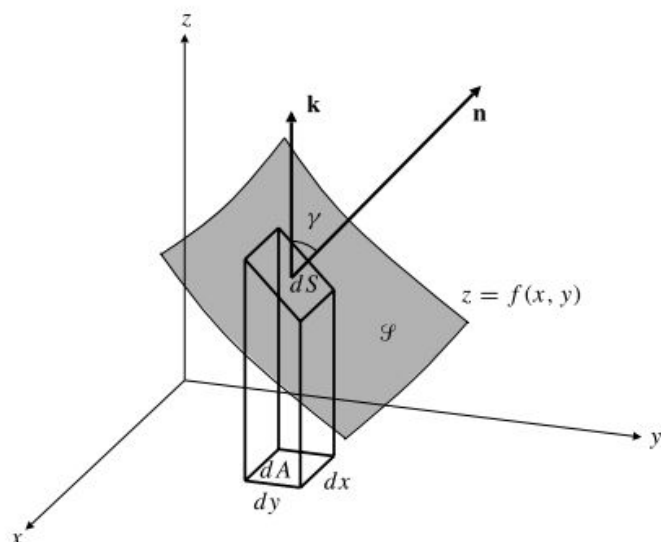


Figura 14.47 El elemento de área de superficie dS en la superficie $z = f(x, y)$ es $\sec \gamma$ multiplicado por su proyección vertical dA en el plano xy .

Como

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1(x, y))^2 + (f_2(x, y))^2}}$$

tenemos

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Por tanto, el área de \mathcal{S} es

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Ejemplo 1 Calcule el área de la parte del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución Como $\partial z / \partial x = 2x$ y $\partial z / \partial y = -2y$, el elemento de área de superficie es

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

El área de la superficie requerida es la integral de dS en el disco $r \leq a$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+4r^2} r dr && \text{Sea } u = 1 + 4r^2 \\ &= (2\pi) \frac{1}{8} \int_1^{1+4a^2} \sqrt{u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} \right) u^{3/2} \Big|_1^{1+4a^2} = \frac{\pi}{6} ((1+4a^2)^{3/2} - 1) \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

Atracción gravitatoria de un disco

La ley de la gravitación universal de Newton establece que dos masas puntuales m_1 y m_2 , separadas por una distancia s , se atraen entre sí con una fuerza

$$F = \frac{km_1 m_2}{s^2}$$

siendo k una constante universal. La fuerza sobre cada masa se dirige hacia la otra, en la recta que une las dos masas. Supongamos que un disco plano D de radio a , que ocupa la región $x^2 + y^2 \leq a^2$ del plano xy , tiene una *densidad de área* constante σ (unidades de masa por unidad de área). Vamos a calcular la fuerza total de atracción que ejerce este disco sobre una masa m situada en el punto $(0, 0, b)$ en el eje z positivo. La fuerza total es una magnitud vectorial. Aunque los elementos de masa del disco están en direcciones diferentes respecto a la masa m , la simetría del problema nos indica que la fuerza neta actuará en la dirección que apunta hacia el centro del disco, es decir, hacia el origen. Por tanto, la fuerza total será $-F\mathbf{k}$, siendo F su módulo.

Calcularemos F integrando la componente vertical dF de la fuerza de atracción sobre m debida a la masa σdA en un elemento de área dA del disco. Si el elemento de área está en el punto cuyas coordenadas polares son $[r, \theta]$, y si la recta que va desde este punto $(0, 0, b)$ forma un ángulo ψ con el eje z , como se muestra en la Figura 14.48, entonces la componente vertical de la fuerza de atracción que ejerce el elemento de masa σdA sobre m es

$$dF = \frac{km\sigma dA}{r^2 + b^2} \cos \psi = km\sigma b \frac{dA}{(r^2 + b^2)^{3/2}}$$

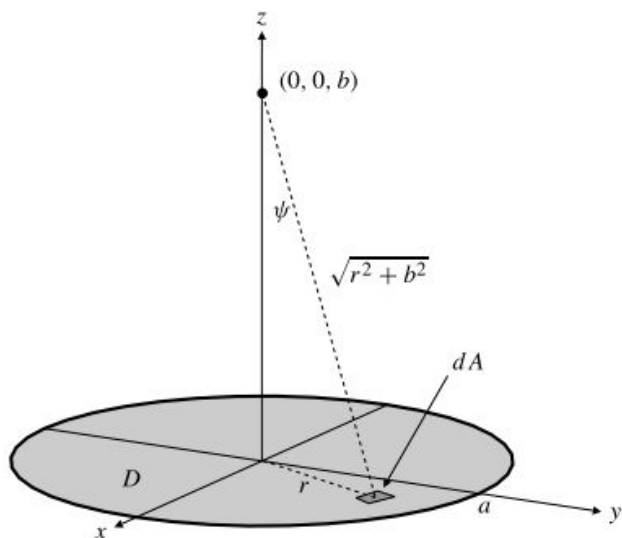


Figura 14.48 Cada elemento de masa σdA atrae a m en una dirección diferente.

De acuerdo con esto, la fuerza de atracción vertical total que ejerce el disco sobre m es

$$\begin{aligned}
 F &= km\sigma b \iint_D \frac{dA}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \\
 &= km\sigma b \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad \text{Sea } u = r^2 + b^2 \\
 &= \pi km\sigma b \int_{b^2}^{a^2 + b^2} u^{-3/2} du \\
 &= \pi km\sigma b \left(\frac{-2}{\sqrt{u}} \right) \Big|_{b^2}^{a^2 + b^2} = 2\pi km\sigma \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Observación Si hacemos que a tienda a infinito en la fórmula anterior, obtendremos la fórmula $F = 2\pi km\sigma$, que representa la fuerza de atracción de un plano con densidad de área σ sobre una masa m situada a una distancia b de dicho plano. Obsérvese que F no depende de b . Intente razonar en términos físicos por qué debe ser así.

Observación La fuerza de atracción sobre una masa puntual debida a objetos sólidos simétricos (como bolas, cilindros y conos) con densidad δ constante (unidades de masa por unidad de volumen) se puede obtener integrando las contribuciones de elementos de fuerza formados por secciones finas con forma de disco del sólido. Véanse los Ejercicios 14-17 posteriores.

Momentos y centros de masa

El centro de masa de un cuerpo rígido es aquel punto (fijo en el cuerpo) del que dicho cuerpo se puede suspender de forma que en presencia de un campo gravitatorio constante no experimentará torques debidos a desequilibrios que hagan que rote. Los torques experimentados por un elemento de masa dm del cuerpo se pueden expresar en función de los **momentos** de dm respecto a los tres planos coordenados. Si el cuerpo ocupa una región R en el espacio tridimensional, y tiene una densidad de volumen continua $\delta(x, y, z)$, entonces el elemento de masa $dm = \delta(x, y, z) dV$ que ocupa el elemento de volumen dV tiene **momentos** $(x - x_0) dm$, $(y - y_0) dm$ y $(z - z_0) dm$ con respecto a los planos $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$, respectivamente. Por tanto, los momentos totales del cuerpo respecto a estos tres planos son

$$M_{x=x_0} = \iiint_R (x - x_0) \delta(x, y, z) dV = M_{x=0} - x_0 m$$

$$M_{y=y_0} = \iiint_R (y - y_0) \delta(x, y, z) dV = M_{y=0} - y_0 m$$

$$M_{z=z_0} = \iiint_R (z - z_0) \delta(x, y, z) dV = M_{z=0} - z_0 m$$

siendo $m = \iiint_R \delta dV$ la masa del cuerpo, y $M_{x=0}$, $M_{y=0}$ y $M_{z=0}$ los momentos respecto a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente. El **centro de masas** $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del cuerpo es el punto en el que $M_{x=\bar{x}}$, $M_{y=\bar{y}}$ y $M_{z=\bar{z}}$ son todos iguales a cero. Por tanto,

Centro de masas

El centro de masas de un sólido que ocupa la región R en el espacio tridimensional y que tiene una densidad continua $\delta(x, y, z)$ (unidades de masa por unidad de volumen) es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\iiint_R x \delta \, dV}{\iiint_R \delta \, dV}, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\iiint_R y \delta \, dV}{\iiint_R \delta \, dV},$$

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\iiint_R z \delta \, dV}{\iiint_R \delta \, dV}$$

Estas fórmulas se pueden combinar en una única fórmula vectorial que exprese el vector de posición $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$ del centro de masas en función del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de un punto arbitrario de R ,

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{M_{x=0}\mathbf{i} + M_{y=0}\mathbf{j} + M_{z=0}\mathbf{k}}{m} = \frac{\iiint_R \delta \mathbf{r} \, dV}{\iiint_R \delta \, dV}$$

donde la integral de la función vectorial $\delta \mathbf{r}$ debe entenderse como el vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de $\delta \mathbf{r}$.

Observación Se pueden obtener expresiones similares para distribuciones de masas en regiones del plano o en intervalos de una recta. Se utilizan las densidades de área o lineal apropiadas e integrales dobles o simples.

Observación Si la densidad es constante, se cancela en las expresiones del centro de masa. En este caso, el centro de masa es una propiedad *geométrica* de la región R y se denomina **centroide** o **centro de gravedad** de dicha región.

Ejemplo 2 Calcule el centroide del tetraedro T limitado por los planos coordenados y por el plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Solución La densidad se supone constante, por lo que supondremos que es la unidad. La masa de T es, por tanto, igual a su volumen; $m = V = abc/6$. El momento de T con respecto al plano yz es (véase la Figura 14.49):

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \iiint_T x \, dV \\ &= \int_0^a x \, dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz \\ &= c \int_0^a x \, dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \int_0^a x \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b} \right] \Big|_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})} dx \\
&= \frac{bc}{2} \int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx \\
&= \frac{bc}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} \right] \Big|_0^a = \frac{a^2 bc}{24}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bar{x} = M_{x=0}/m = a/4$. Por simetría, el centroide de T es $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$.

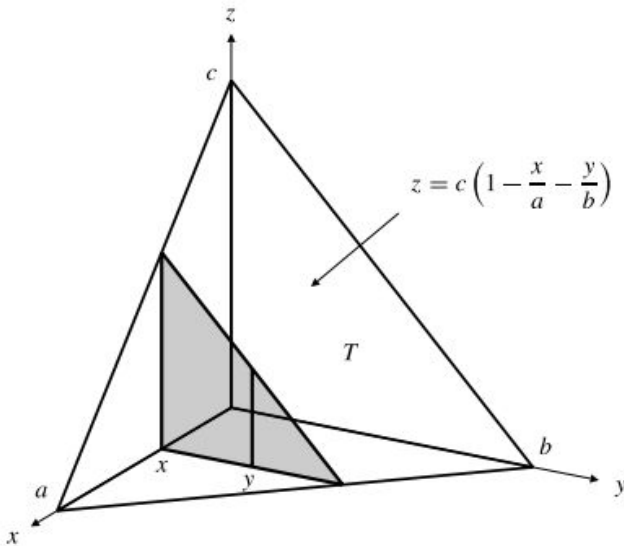


Figura 14.49 Diagrama de iteración de una integral triple en el tetraedro del Ejemplo 2.

Ejemplo 3 Calcule el centro de masa de un sólido que ocupa la región S que cumple $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, si la densidad a una distancia ρ del origen es $k\rho$.

Solución La masa del sólido se distribuye simétricamente en la parte del primer octante de la bola $\rho \leq a$, por lo que el centro de masas, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, debe cumplir $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. La masa del sólido es

$$m = \iiint_S k\rho \, dV = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi \int_0^a (k\rho) \rho^2 \, d\rho = \frac{\pi k a^4}{8}$$

El momento respecto al plano xy es

$$\begin{aligned}
M_{z=0} &= \iiint_S z k\rho \, dV = \iiint_S (k\rho) \rho \cos \phi \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{k}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin(2\phi) \, d\phi \int_0^a \rho^4 \, d\rho = \frac{k\pi a^5}{20}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\bar{z} = \frac{k\pi a^5}{20} / \frac{k\pi a^4}{8} = \frac{2a}{5}$ y el centro de masas es $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

Momento de inercia

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v es

$$\text{KE} = \frac{1}{2} mv^2$$

La masa de la partícula mide su *inercia*, que es dos veces la energía que tiene cuando su velocidad es de una unidad.

Si la partícula se mueve siguiendo una circunferencia de radio D , su movimiento se puede describir en función de su **velocidad angular**, Ω , que se mide en radianes por unidad de tiempo. En una revolución la partícula recorre una distancia $2\pi D$ en un tiempo $2\pi/\Omega$. Por tanto, su velocidad v (de traslación) se relaciona con su velocidad angular mediante la expresión

$$v = \Omega D$$

Supongamos que un cuerpo rígido está girando con velocidad angular Ω con respecto a un eje L . Si (en algún instante) el cuerpo ocupa una región R cuya densidad es $\delta = \delta(x, y, z)$, entonces cada elemento de masa $dm = \delta dV$ del cuerpo tiene energía cinética

$$d\text{KE} = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \delta \Omega^2 D^2 dV$$

siendo $D = D(x, y, z)$ la distancia perpendicular desde el elemento de volumen dV al eje de rotación L . La energía cinética total del cuerpo en rotación es, por tanto,

$$\text{KE} = \frac{1}{2} \Omega^2 \iiint_R D^2 \delta dV = \frac{1}{2} I \Omega^2$$

siendo

$$I = \iiint_R D^2 \delta dV$$

I se denomina **momento de inercia** del cuerpo en rotación respecto al eje L . El momento de inercia tiene el mismo papel en la expresión de la energía cinética de rotación (en función de la velocidad angular) que la masa en la expresión de la energía cinética de traslación (en función de la velocidad lineal). El momento de inercia es dos veces la energía cinética del cuerpo cuando gira con velocidad angular unidad.

Si toda la masa del cuerpo en rotación estuviera concentrada a una distancia D_0 del eje de rotación, entonces su energía cinética sería $\frac{1}{2} m D_0^2 \Omega^2$. El **radio de giro** \bar{D} es el valor de D_0 para el que esta energía es igual a la energía cinética real $\frac{1}{2} I \Omega^2$ del cuerpo en rotación. Por tanto, $m \bar{D}^2 = I$, y el radio de giro es

$$\bar{D} = \sqrt{I/m} = \left(\frac{\iiint_R D^2 \delta dV}{\iiint_R \delta dV} \right)^{1/2}$$

Ejemplo 4 (Aceleración de una bola que rueda)

- Calcule el momento de inercia y el radio de giro de una bola sólida de radio a y densidad constante δ con respecto a un diámetro de dicha bola.
- ¿Con qué aceleración lineal rodará la bola (sin deslizamiento) por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal?

Solución

- (a) Tomaremos el eje z como diámetro e integraremos en coordenadas cilíndricas en la bola B de radio a centrada en el origen. Como la densidad δ es constante, tenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \delta \iiint_B r^2 dV \\
 &= \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \\
 &= 4\pi\delta \int_0^a r^3 \sqrt{a^2-r^2} dr \quad \text{Sea } u = a^2 - r^2 \\
 &= 2\pi\delta \int_0^{a^2} (a^2 - u) \sqrt{u} du \\
 &= 2\pi\delta \left(\frac{2}{3} a^2 u^{3/2} - \frac{2}{5} u^{5/2} \right) \Big|_0^{a^2} = \frac{8}{15} \pi \delta a^5
 \end{aligned}$$

Como la masa de la bola es $m = \frac{4}{3} \pi \delta a^3$, el radio de giro es

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}} a$$

- (b) Podemos determinar la aceleración de la bola utilizando la ley de la conservación de la energía total (cinética más potencial). Cuando la bola rueda por el plano con velocidad v , su centro se mueve con la misma velocidad v , y pierde altura con una velocidad de $v \sin \alpha$ (véase la Figura 14.50). Como la bola no se desliza, rota respecto a un eje horizontal que pasa por su centro con velocidad angular $\Omega = v/a$. Por consiguiente, su energía cinética (debida a la traslación y la rotación) es

$$\begin{aligned}
 \text{KE} &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \Omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m a^2 \frac{v^2}{a^2} = \frac{7}{10} m v^2
 \end{aligned}$$

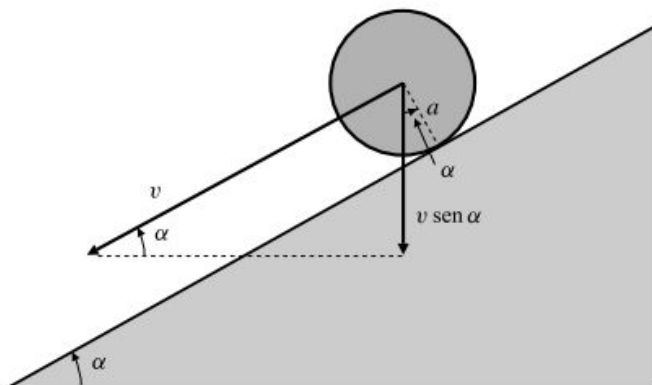


Figura 14.50 Velocidad real y velocidad vertical de una bola que rueda por un plano inclinado como en el Ejemplo 4.

Cuando el centro de la bola está a una altura h (por encima de la altura de referencia), la bola tiene una energía potencial (gravitatoria)

$$\text{PE} = mgh$$

Esta energía es el trabajo que se debe realizar contra la fuerza gravitatoria constante $F = mg$ para elevar la bola a una altura h . Como la energía total se conserva,

$$\frac{7}{10} m v^2 + mgh = \text{constante}$$

Diferenciando con respecto al tiempo t , se obtiene

$$0 = \frac{7}{10} m 2v \frac{dv}{dt} + mg \frac{dh}{dt} = \frac{7}{5} mv \frac{dv}{dt} - mgv \sin \alpha$$

Por tanto, la bola rueda por el plano inclinado con aceleración $\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$.

Ejercicios 14.7

Problemas de área de superficies

Utilice integrales dobles para calcular las áreas de las superficies en los Ejercicios 1-9.

1. La parte del plano $z = 2x + 2y$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
2. La parte del plano $5z = 3x - 4y$ que está dentro del cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$.
3. El hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
4. La superficie semielipsoidal $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
5. La superficie cónica $3z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$.
6. El paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en el primer octante.
7. La parte de la superficie $z = y^2$ que está por encima del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.
8. La parte de la superficie $z = \sqrt{x}$ que está por encima de la región $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.
9. La parte de la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = 4$ que está por encima de la región $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$.
10. Demuestre que las partes de las superficies $z = 2xy$ y $z = x^2 + y^2$ que están en el mismo cilindro vertical tienen la misma área.
11. Demuestre que el área S de la parte del paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ que está por encima del cuadrado $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ está dada por

$$S = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (1 + \sec^2 \theta)^{3/2} d\theta - \frac{2\pi}{3}$$

y utilice métodos numéricos para calcular el área con tres cifras decimales de precisión.

- *12. El dosel que se muestra en la Figura 14.51 es la parte de la semiesfera de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen que está por encima del cuadrado $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Calcule su área. *Sugerencia:* Es posible obtener una solución exacta, calculando primero el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que está por encima del plano $z = 1$. Si resuelve el problema directamente integrando el elemento de área de superficie que está por encima del cuadrado, puede

obtener una integral que no se puede calcular de forma exacta, y tendrá que utilizar métodos numéricos.

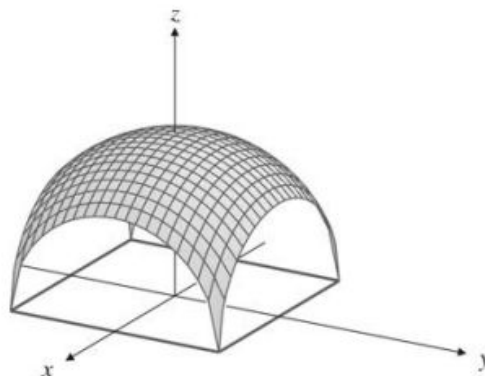


Figura 14.51

Masa y atracción gravitatoria

13. Calcule la masa de un planeta esférico de radio a cuya densidad a una distancia R del centro es $\delta = A/(B + R^2)$.

En los Ejercicios 14-17, calcule la atracción gravitatoria que los objetos dados ejercen sobre una masa m situada en la posición $(0, 0, b)$. Suponga que los objetos tienen una densidad constante δ . En cada caso se puede obtener la respuesta integrando las contribuciones hechas por discos de espesor dz , utilizando la fórmula de la atracción que ejerce el disco obtenida en el texto.

14. La bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, con $a < b$.
15. El cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, con $h < b$.
16. El cono $0 \leq z \leq b - (\sqrt{x^2 + y^2})/a$.
17. La semibola $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, con $a < b$.

Centros de masa y centroides

18. Calcule el centro de masa de un objeto que ocupa el cubo $0 \leq x, y, z \leq a$ y cuya densidad está dada por $\delta = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcule los centroides de las regiones de los Ejercicios 19-22.

19. El prisma $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

20. La región no acotada $0 \leq z \leq e^{-(x^2+y^2)}$.
21. La parte del primer octante de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.
22. La región que está dentro del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ y por debajo del plano $x + y + z = 2$.

Momentos de inercia

23. Explique *en términos físicos* por qué la aceleración de la bola que rueda por el plano inclinado en el Ejemplo 4 no tiende a g (la aceleración debida a la gravedad) cuando el ángulo de inclinación α tiende a 90° .

Calcule los momentos de inercia y los radios de giro de los objetos sólidos de los Ejercicios 24-32. Suponga en todos los casos que la densidad es constante.

24. Un cilindro circular cuyo radio en la base es a y cuya altura es h , con respecto al eje del cilindro.
25. Un cilindro circular cuyo radio en la base es a y cuya altura es h , con respecto a un diámetro de su base.
26. Un cono circular recto cuyo radio en la base es a y cuya altura es h , con respecto a su eje.
27. Un cono circular recto cuyo radio en la base es a y cuya altura es h , con respecto a un diámetro de su base.
28. Un cubo de lado a con respecto a uno de sus lados.
29. Un cubo de lado a con respecto a la diagonal de una de sus caras.
30. Un cubo de lado a con respecto a su diagonal.
31. La caja rectangular $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$ con respecto al eje z .
32. La región entre los dos cilindros concéntricos $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ (con $0 < a < b$) y entre $z = 0$ y $z = c$ sobre el eje z .
33. Una bola de radio a tiene densidad constante δ . Se realiza un agujero cilíndrico de radio $b < a$ a través del centro de la bola. Calcule la masa de la parte restante de la bola y su momento de inercia con respecto al eje del agujero.
34. ¿Con qué aceleración rodará (sin deslizamiento) un cilindro sólido con radio en la base a , altura h y densidad constante δ por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal?
35. Repita el Ejercicio 34 para la bola con el agujero cilíndrico del Ejercicio 33. Suponga que el eje del agujero permanece horizontal mientras la bola rueda.
- *36. Un péndulo rígido de masa m oscila con respecto a un punto A en un eje horizontal. Su momento de inercia respecto a dicho eje es I . El centro de masa C del péndulo está a una distancia a de A . Cuando el péndulo cuelga en reposo, C está directamente debajo

de A (¿por qué?). Suponga que el péndulo está oscilando. Sea $\theta = \theta(t)$ el desplazamiento angular de la recta AC con respecto a la vertical en el instante t ($\theta = 0$ cuando el péndulo está en su posición de reposo). Utilice un argumento basado en la ley de la conservación de la energía semejante al del Ejemplo 4 para demostrar que

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mga \cos \theta = \text{constante}$$

y, a partir de aquí, diferenciando con respecto a t , que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{I} \sin \theta = 0$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal, y no es fácil de resolver. Sin embargo, para oscilaciones pequeñas ($|\theta|$ pequeño) podemos utilizar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. En este caso la ecuación diferencial es la del movimiento armónico simple. ¿Cuál es el periodo?

- *37. Sea L_0 una línea recta que pasa por el centro de masa de un cuerpo rígido B de masa m . Sea L_k una recta paralela a L_0 y a k unidades de distancia. Si I_0 e I_k son los momentos de inercia de B con respecto a L_0 y L_k , respectivamente, demuestre que $I_k = I_0 + k^2 m$. Teniendo esto en cuenta, podemos ver que un cuerpo siempre tendrá su momento de inercia mínimo respecto un eje que pase por su centro de masa. *Sugerencia:* Suponga que el eje z coincide con L_0 y L_k pasa por él $(k, 0, 0)$.
- *38. Vuelva a obtener la expresión de la energía cinética total de la bola en rotación del Ejemplo 4, considerando que en cualquier instante la bola está rotando con respecto una recta horizontal que pasa por su punto de contacto con el plano inclinado. Utilice el resultado del Ejercicio 37.
- *39. (**Productos de inercia**) Un cuerpo rígido con densidad δ se sitúa con su centro de masas en el origen y ocupa una región R del espacio tridimensional. Suponga que sus seis momentos segundos P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} , P_{xy} , P_{xz} y P_{yz} son conocidos, siendo

$$P_{xx} = \iiint_R x^2 \delta dV, \quad P_{xy} = \iiint_R xy \delta dV, \quad \dots$$

Existen tablas que proporcionan estos seis momentos para cuerpos con muchas formas estándar. Se denominan productos de inercia. Demuestre cómo expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por el origen en función de estos seis momentos segundos (si este resultado se combina con el del Ejercicio 37, se puede obtener el momento de inercia con respecto a *cualquier* eje).

Repaso del capítulo

Ideas clave

• ¿Qué significan las siguientes expresiones?

- ◇ Suma de Riemann para $f(x, y)$ en $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$
- ◇ $f(x, y)$ es integrable en $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$
- ◇ Integral doble de $f(x, y)$ en $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$
- ◇ Iteración de una integral doble
- ◇ Valor medio de $f(x, y)$ en una región R
- ◇ Elemento de área en coordenadas polares
- ◇ Integral triple
- ◇ Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas
- ◇ Elemento de volumen en coordenadas esféricas
- ◇ Área de la superficie de la gráfica $z = f(x, y)$
- ◇ Momento de inercia de un sólido respecto a un eje

• Explique cómo se cambian variables en una integral doble.

• ¿Cómo se calcula el centroide de una región sólida?

• ¿Cómo se calcula el momento de inercia de un sólido con respecto a un eje?

Ejercicios de repaso


1. Calcule $\iint_R (x + y) dA$ en la región del primer cuadrante que está por debajo de $x = y^2$ y por encima de $y = x^2$.
2. Calcule $\iint_P (x^2 + y^2) dA$, siendo P el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ y $(1, 1)$.
3. Calcule $\iint_S (y/x) dA$, siendo S la parte del disco $x^2 + y^2 \leq 4$ que está en el primer cuadrante y por debajo de la recta $y = x$.
4. Considere la integral iterada

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2} dx$$
 - (a) Expresé I como una integral doble $\iint_R e^{-x^2-y^2} dA$ y dibuje la región R donde se calcula la integral doble.
 - (b) Expresé I como una integral iterada con el orden de iteración inverso.
 - (c) Expresé I como una integral iterada en coordenadas polares.
 - (d) Calcule I .
5. Calcule el valor de la constante $k > 0$ tal que el volumen de la región que está en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y por encima del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ es la cuarta parte del volumen de la esfera total.
6. Vuelva a iterar la integral

$$I = \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_2^6 dy \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x, y) dx$$
 con la variable y en la integral interna.
7. Sea $J = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y f(x, y, z) dx$. Expresé J como una integral iterada en la que la iteración se realizan en el siguiente orden: primero z , después y , después x .
8. Un objeto con forma de cono circular recto tiene una altura de 10 m y el radio de su base es de 5 m. Su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia a la base y su valor es de 3000 kg/m³ en su vértice.
 - (a) Calcule la masa del objeto.
 - (b) Expresé en forma de integral iterada el momento de inercia del objeto con respecto a su eje central.
9. Calcule el valor medio de $f(t) = \int_t^a e^{-x^2} dx$ en el intervalo $0 \leq t \leq a$.
10. Calcule el valor medio de la función $f(x, y) = [x + y]$ en el cuarto de disco $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$ (recuérdese que $[x]$ indica el máximo entero menor o igual que x).
11. Sea D la menor de las dos regiones sólidas limitadas por las superficies

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2$$
 siendo a una constante positiva. Calcule

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dV$$
12. Calcule el momento de inercia respecto al eje z de un sólido V de densidad 1 si dicho sólido está especificado por las inequaciones $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 \leq 2ay$, siendo $a > 0$.

- 13.** El sólido rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$ está dividido en dos partes por el plano $2x + y + z = 2$. Sea D la parte que incluye al origen. Calcule el volumen de D y \bar{z} , la coordenada z del centroide de D .
- 14.** Un sólido S está formado por los puntos (x, y, z) que están en el primer octante y satisfacen $x + y + 2z \leq 2$ e $y + z \leq 1$. Calcule el volumen de S y la coordenada x de su centroide.
- 15.** Calcule $\iiint_S z \, dV$, siendo S la parte del primer octante que está por encima del plano $x + y - z = 1$ y por debajo del plano $z = 1$.
- 16.** Calcule el área de la parte del plano $z = 2x$ que está en el interior del paraboloide $z = x^2 + y^2$.
- 17.** Calcule el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2x$.  Exprese la respuesta como una integral simple, y calcúlela con una precisión de 3 cifras decimales.
- *18.** Calcule el volumen de la menor de las dos regiones en las que el plano $x + y + z = 1$ divide al elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. *Sugerencia:* Realice primero un cambio de variables que transforme el elipsoide en una bola. Sustituya después el plano por otro plano con una ecuación más simple que pase a la misma distancia del origen.
- 2.** Calcule el área de la parte del plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ (siendo $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$) que está en el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$
- 3.** (a) Desarrolle $1/(1 - xy)$ en forma de serie geométrica, y a partir de aquí, demuestre que
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
- (b) De forma similar, exprese como suma de series las siguientes integrales:
- (i) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xy} \, dx \, dy$
- (ii) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz} \, dx \, dy \, dz$
- (iii) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz} \, dx \, dy \, dz$
- 4.** Sea P el paralelepípedo limitado por las tres parejas de planos paralelos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = d_1 > 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = d_2 > 0$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = d_3 > 0$, siendo \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} vectores constantes, y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que
$$\iiint_P (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, dx \, dy \, dz = \frac{(d_1 d_2 d_3)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$


Sugerencia: Utilice el cambio de variables $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, $v = \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$, $w = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$.

Problemas avanzados

- 1.** El plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ (siendo $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$) divide al elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

en dos partes desiguales. Calcule el volumen de la menor.

- 5.** Se realiza un agujero cuya sección cruzada es un cuadrado de lado 2 que atraviesa por el centro una bola de radio 2. Calcule el volumen de la parte de la bola que queda. 

- *6.** Calcule el volumen limitado por la superficie cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.
- *7.** Calcule el volumen limitado por la superficie $|x|^{1/3} + |y|^{1/3} + |z|^{1/3} = |a|^{1/3}$.



CAPÍTULO 15

Campos vectoriales

—Toma algo más de té —dijo muy seriamente la Liebre de Marzo a Alicia.

—No he tomado nada todavía —replicó Alicia en tono ofendido—, así que no puedo tomar más.

—Querrás decir que no puedes tomar menos —dijo el Sombrero Loco—. Es muy fácil tomar más cuando no se ha tomado nada.

Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)

de Alicia en el País de las Maravillas

Introducción Este capítulo y el siguiente tratan de funciones vectoriales de variable vectorial, que generalmente serán funciones cuyos dominios y rangos estarán en el plano o en el espacio tridimensional. Estas funciones se denominan frecuentemente *campos vectoriales*. Entre las aplicaciones de los campos vectoriales se encuentran las integrales que se realizan, no en ejes ni en regiones del plano o del espacio tridimensional, sino en curvas o superficies. En este capítulo presentaremos las integrales realizadas en rectas y superficies. En el capítulo siguiente desarrollaremos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo para integrales en campos vectoriales.

15.1 Campos escalares y vectoriales

Una función cuyo dominio y rango son subconjuntos del espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 se denomina **campo vectorial**. Por lo tanto, un campo vectorial \mathbf{F} asocia un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de su dominio. Las tres componentes de \mathbf{F} son funciones escalares (reales) $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ y $F_3(x, y, z)$, y $\mathbf{F}(x, y, z)$ se puede expresar en función de la base estándar en \mathbb{R}^3 como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

Nótese que en este caso los subíndices representan *componentes* de un vector, *no* derivadas parciales. Si $F_3(x, y, z) = 0$ y F_1 y F_2 son independientes de z , entonces \mathbf{F} se reduce a

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$$

y se denomina **campo vectorial en el plano**, o campo vectorial en el plano xy . Utilizaremos con mucha frecuencia vectores de posición como argumentos de un campo vectorial. El vector de posición de (x, y, z) es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y podemos expresar $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ como notación abreviada de $\mathbf{F}(x, y, z)$. En el contexto de campos vectoriales, una función escalar de una variable vector (es decir, una función de varias variables considerada en el contexto de los Capítulos 12-14) se denomina **campo escalar**. Por tanto, las componentes de un campo vectorial son campos escalares. Muchos resultados que demostraremos en el ámbito de los campos vectoriales requieren que los campos sean suaves en algún sentido. Diremos que un campo vectorial es **suave** siempre que sus campos escalares componentes tengan derivadas parciales continuas de todos los órdenes (sin embargo, en la mayor parte de los casos, será suficiente que sean continuas hasta segundo orden).

Los campos vectoriales aparecen en muchas áreas de las matemáticas aplicadas. Enumeraremos algunas:

- El campo gravitatorio $\mathbf{F}(x, y, z)$ de un objeto es la fuerza de atracción que dicho objeto ejerce sobre una masa unidad situada en la posición (x, y, z) .
- La fuerza del campo electrostático $\mathbf{E}(x, y, z)$ debida a un objeto eléctricamente cargado es la fuerza que dicho objeto ejerce sobre una unidad de carga situada en la posición (x, y, z) (dicha fuerza puede ser de atracción o de repulsión).
- El campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z)$ en un fluido (o sólido) en movimiento es la velocidad que tiene una partícula en la posición (x, y, z) . Si el movimiento no es en «estado estacionario», entonces el campo de velocidades dependerá también del tiempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$.
- El gradiente $\nabla f(x, y, z)$ de cualquier campo escalar f proporciona la dirección y la magnitud de la máxima tasa de crecimiento de f en (x, y, z) . En particular, un *gradiente de temperaturas*, $\nabla T(x, y, z)$, es un campo vectorial que da la dirección y la magnitud de la máxima tasa de incremento de temperatura T en el punto (x, y, z) , en un medio conductor del calor. Los *gradientes de presión* proporcionan información similar sobre la variación de presión en un fluido como una masa de aire o un océano.
- Los vectores radial unitario y transversal unitario $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son ejemplos de campos vectoriales en el plano xy . Ambos están definidos en todos los puntos del plano excepto en el origen.

Ejemplo 1 (Campo gravitatorio de una masa puntual) El campo gravitatorio que produce una masa puntual m situada en el punto P_0 con vector de posición \mathbf{r}_0 es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= -km \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

siendo $k > 0$ una constante. \mathbf{F} apunta hacia el punto \mathbf{r}_0 y su módulo es

$$|\mathbf{F}| = km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

La Figura 15.1 muestra gráficamente algunos vectores en una sección plana del campo. Cada uno de ellos representa los valores del campo en la posición de sus orígenes. Las longitudes de los vectores indican que la fuerza del campo crece a medida que nos acercamos a P_0 .

Observación El campo electrostático \mathbf{F} que produce una carga puntual q situada en P_0 se expresa mediante la misma fórmula que el campo gravitatorio, con la excepción de que q sustituye a $-m$. La razón del cambio de signo es que las cargas iguales se repelen entre sí, mientras que las masas se atraen entre sí.

Ejemplo 2 El campo de velocidades de un sólido en rotación alrededor del eje z con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j}$$

Como tiene el mismo valor en todos los planos normales al eje z , \mathbf{v} se puede ver como un campo vectorial en el plano. La Figura 15.2 muestra algunos vectores de este campo.

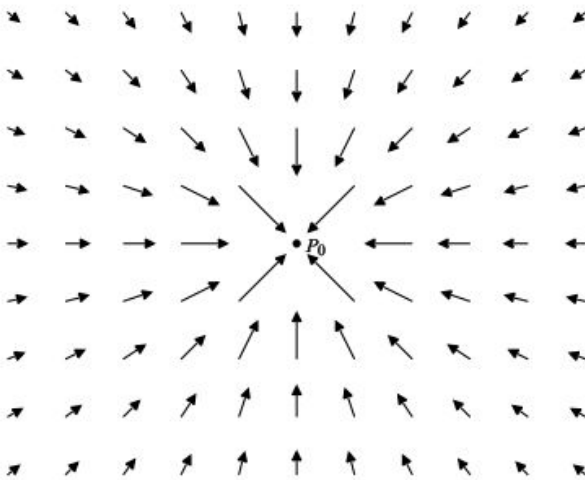


Figura 15.1 Campo gravitatorio de una masa puntual situada en P_0 .

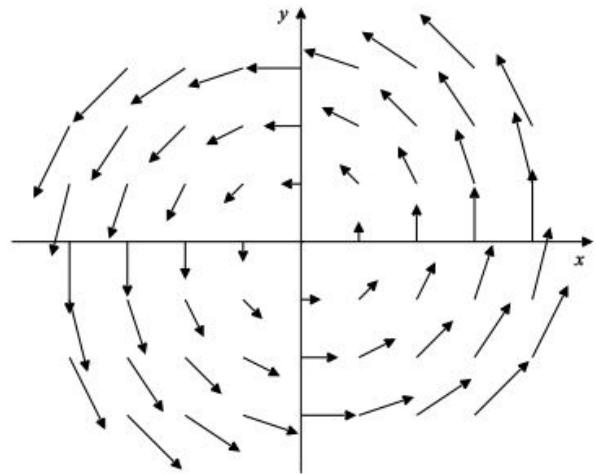


Figura 15.2 Campo de velocidades de un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z .

Líneas de campo (curvas integrales)

Las representaciones gráficas de los campos vectoriales como las que se muestran en las Figuras 15.1 y 15.2, y el campo de velocidades del viento en una colina que se muestra en la Figura 15.3, sugieren un patrón de movimiento en el espacio o en el plano. Sea o no el campo un campo de velocidades, podemos interpretarlo de ese modo y preguntarnos qué camino seguiría una partícula, situada inicialmente en un punto, cuya velocidad estuviera dada por el campo. El camino sería una curva a la cual el campo sería tangente en cada uno de sus puntos. Estas curvas se denominan **líneas de campo** o **curvas integrales** para un campo vectorial dado. En el caso concreto en el que el campo vectorial represente la velocidad de flujo de un fluido, las líneas de campo se denominan **líneas de corriente** o **líneas de flujo** en dicho fluido. La Figura 15.3 muestra algunas de estas líneas para el flujo del aire. En el caso de un campo de fuerzas, las líneas de campo se denominan **líneas de fuerza**.

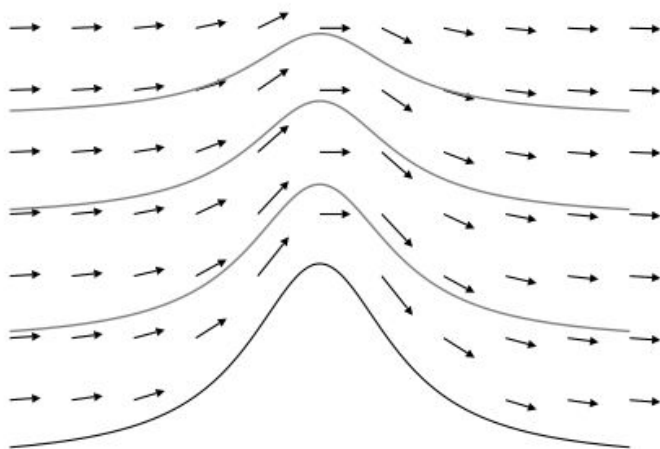


Figura 15.3 El campo de velocidades y algunas líneas de flujo del viento sobre una colina.

Las líneas de campo de \mathbf{F} no dependen de su módulo en un punto dado, sino sólo de la dirección del campo. Si la línea de campo que pasa por un punto tiene como función paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, entonces su vector tangente $d\mathbf{r}/dt$ debe ser paralelo a $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ para todo t . Por consiguiente,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda(t) \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

En *algunos* campos vectoriales esta ecuación diferencial se puede integrar para obtener las líneas de campo. Si dividimos la ecuación en sus componentes,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(t) F_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda(t) F_3(x, y, z)$$

Se pueden obtener expresiones diferenciales equivalentes para $\lambda(t) dt$ y, a partir de aquí, se puede expresar la ecuación diferencial de las líneas de campo en la forma

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

Si al multiplicar estas ecuaciones diferenciales por alguna función se pueden expresar en la forma

$$P(x) dx = Q(y) dy = R(z) dz$$

entonces es posible integrar las tres expresiones para obtener las líneas de campo.

Ejemplo 3 Calcule las líneas de campo del campo gravitatorio del Ejemplo 1:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -km \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}$$

Solución El vector en el numerador de la fracción da la dirección de \mathbf{F} . Por tanto, las líneas de campo satisfacen el sistema

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}$$

Integrando las tres expresiones se llega a

$$\ln |x - x_0| + \ln C_1 = \ln |y - y_0| + \ln C_2 = \ln |z - z_0| + \ln C_3$$

o, tomando exponenciales,

$$C_1(x - x_0) = C_2(y - y_0) = C_3(z - z_0)$$

Esto representa dos familias de planos que pasan por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Las líneas de campo son las intersecciones de los planos de cada una de las familias, por lo que son rectas que pasan por el punto P_0 . Ésta es una familia de rectas de *dos parámetros*; cualquiera de las constantes C_i que sea distinta de cero se puede suprimir de las ecuaciones anteriores dividiéndolas por dicha constante. La naturaleza de las líneas de campo es clara observando la representación del campo vectorial en la Figura 15.1.

Ejemplo 4 Calcule las líneas de campo del campo de velocidades $\mathbf{v} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ del Ejemplo 2.

Solución Las líneas de campo satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

En esta ecuación podemos separar variables para obtener $x dx = -y dy$. Al integrar resulta, entonces, $x^2/2 = -y^2/2 + C/2$, o $x^2 + y^2 = C$. Por tanto, las líneas de campo son circunferencias centradas en el origen del plano xy , como se puede ver en la representación del campo vectorial de la Figura 15.2. Si consideramos \mathbf{v} como un campo vectorial en el espacio tridimensional, las líneas de campo son circunferencias horizontales centradas en el eje z :

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad z = C_2$$

La posibilidad de obtener líneas de campo depende de la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales y , en el espacio tridimensional, sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5 Calcule las líneas de campo de $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

Solución Las líneas de campo cumplen $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{2x^2z} = \frac{dz}{x^2}$, o, en otros términos,

$$dy = 2x dx \quad y \quad dz = 2z dz$$

Las líneas de campo son las curvas de intersección de las dos familias de cilindros parabólicos $y = x^2 + C_1$ e $y = z^2 + C_2$.

Campos vectoriales en coordenadas polares

Un campo vectorial en el plano se puede expresar en coordenadas polares en la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, definidos en todas partes excepto en el origen como

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

son vectores unitarios en la dirección de r y θ , crecientes en $[r, \theta]$. Nótese que $d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, y que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es simplemente $\hat{\mathbf{r}}$ girado 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj. Nótese también que estamos utilizando F_r y F_θ para indicar las componentes de \mathbf{F} con respecto a la base $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$; los subíndices no indican derivadas parciales. $F_r(r, \theta)$ se denomina componente *radial* de \mathbf{F} , y $F_\theta(r, \theta)$ se denomina componente *transversal*.

Una curva cuya ecuación en polares es $r = r(\theta)$ se puede expresar en forma paramétrica vectorial,

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

como hicimos en la Sección 11.6. Esta curva es una línea de campo de \mathbf{F} si su vector tangente diferencial

$$d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} d\theta = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

es paralelo al vector del campo $\mathbf{F}(r, \theta)$ en todo punto excepto en el origen, es decir, si $r = f(\theta)$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{F_r(r, \theta)} = \frac{r d\theta}{F_\theta(r, \theta)}$$

En casos específicos se pueden obtener las líneas de campo resolviendo esta ecuación.

Ejemplo 6 Represente el campo vectorial $\mathbf{F}(r, \theta) = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$ y calcule sus líneas de campo.

Solución En todo punto $[r, \theta]$, el campo vectorial es la bisectriz del ángulo que forman $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, y forma un ángulo de 45° con respecto a $\hat{\mathbf{r}}$ medido en sentido contrario al de las agujas del reloj. Todos los vectores del campo tienen la misma longitud, $\sqrt{2}$. La Figura 15.4(a) muestra algunos vectores del campo. La figura sugiere que las líneas de campo son espirales que parten del origen. Como $F_r(r, \theta) = F_\theta(r, \theta) = 1$ para este campo, las líneas de campo cumplirán $dr = r d\theta$, o, dividiendo por $d\theta$, $dr/d\theta = r$. Ésta es la ecuación diferencial del crecimiento exponencial y tiene como solución $r = Ke^\theta$, o, en otros términos, $r = e^{\theta+\alpha}$, siendo $\alpha = \ln K$ una constante. La Figura 15.4(b) muestra algunas de estas curvas.

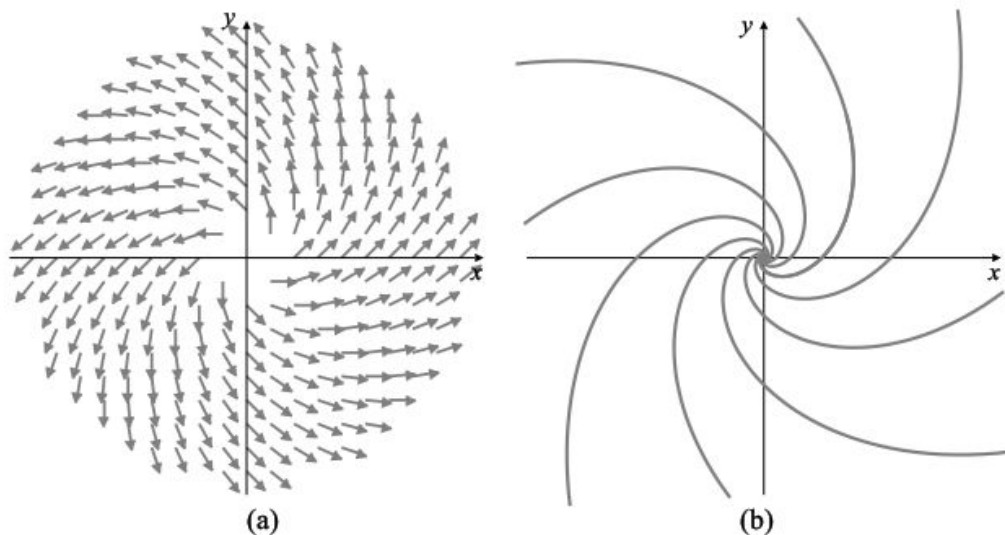


Figura 15.4

- (a) El campo vectorial $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$
 (b) Líneas de campo de $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Ejercicios 15.1

En los Ejercicios 1-8, dibuje los campos de vectores en el plano dado y determine sus líneas de campo.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \nabla(x^2 - y)$
7. $\mathbf{F}(x, y) = \nabla \ln(x^2 + y^2)$
8. $\mathbf{F}(x, y) = \cos y\mathbf{i} - \cos x\mathbf{j}$

En los Ejercicios 9-16, describa las líneas de corriente de los campos de velocidades dados.

9. $\mathbf{v}(x, y, z) = y\mathbf{i} - y\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
10. $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$
11. $\mathbf{v}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(1 + z^2)(x^2 + y^2)}$

13. $\mathbf{v}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

14. $\mathbf{v}(x, y, z) = e^{xyz}(x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

15. $\mathbf{v}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

*16. $\mathbf{v}(x, y) = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ Sugerencia: Sea $y = xv(x)$.

En los Ejercicios 17-20, determine las líneas de campo de los campos vectoriales dados en polares.

17. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + r\hat{\boldsymbol{\theta}}$

18. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

19. $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

20. $\mathbf{F} = r\hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$

15.2 Campos conservativos

Como el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, resulta natural preguntarnos si todo campo vectorial será el gradiente de un campo escalar. Dado un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, deseamos saber si existe un campo escalar $\phi(x, y, z)$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

La respuesta general es negativa. Sólo se pueden expresar de esta forma campos vectoriales especiales.

DEFINICIÓN 1

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ en un dominio D , entonces se dice que \mathbf{F} es un campo vectorial **conservativo** en D , y la función ϕ se denomina **potencial (escalar)** de \mathbf{F} en D . En el plano o en el espacio de n dimensiones, las definiciones son similares.

Como las primitivas, los potenciales no están determinados de forma única; se les pueden añadir constantes arbitrarias. Nótese que \mathbf{F} es **conservativo en un dominio** D si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$ en *todo* punto de D ; el potencial ϕ no puede tener puntos singulares en D .

La ecuación $F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = 0$ se denomina ecuación diferencial **exacta** si el miembro izquierdo es el diferencial de una función escalar $\phi(x, y, z)$:

$$d\phi = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

En este caso, la ecuación diferencial tiene soluciones dadas por $\phi(x, y, z) = C$ (constante) (véase la Sección 17.3 donde se tratan las ecuaciones exactas en el plano). Obsérvese que la ecuación diferencial es exacta si y sólo si el campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es conservativo y que ϕ es el potencial de \mathbf{F} .

Como son campos escalares en vez de campos vectoriales, los potenciales de campos vectoriales conservativos son más fáciles de manejar algebraicamente que los propios campos vectoriales. Por ejemplo, una suma de funciones potenciales es la función potencial de la suma de los correspondientes campos vectoriales. Un campo vectorial siempre se puede obtener a partir de su función potencial calculando el gradiente.

Ejemplo 1 (El campo gravitatorio de una masa puntual es conservativo) Demuestre que el campo gravitatorio $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -km(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3$ del Ejemplo 1 de la Sección 15.1 es conservativo donde está definido (es decir, en todo punto de \mathbb{R}^3 excepto en \mathbf{r}_0), demostrando que

$$\phi(x, y, z) = \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{km}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

es una función potencial de \mathbf{F} .

Solución Obsérvese que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-km(x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \frac{-km(x - x_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = F_1(\mathbf{r})$$

y se pueden obtener fórmulas similares para las otras derivadas parciales de ϕ . Se deduce entonces que $\nabla \phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$ para $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$ y \mathbf{F} es conservativo, excepto en \mathbf{r}_0 .

Observación No es necesario escribir la expresión $km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ en función de las componentes de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, como hemos hecho en el Ejemplo 1, para calcular sus derivadas parciales. Presentamos a continuación una fórmula útil para obtener la derivada del módulo de una función vectorial \mathbf{F} con respecto a una variable x :

$$\frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{F}| = \frac{\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} \right)}{|\mathbf{F}|}$$

Para ver que esto es así, expresamos $|\mathbf{F}| = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}$ y calculamos su derivada utilizando la Regla de la Cadena y la Regla del Producto:

$$\frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{F}| = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}} 2\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} \right) = \frac{\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} \right)}{|\mathbf{F}|}$$

Podemos comparar el resultado con la derivada del valor absoluto de una función de una variable:

$$\frac{d}{dx} |f(x)| = \operatorname{sgn}(f(x)) f'(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$$

En el contexto del Ejemplo 1 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{-km(x - x_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

con expresiones similares para las otras derivadas parciales de $km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

Ejemplo 2 Demuestre que el campo de velocidades $\mathbf{v} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j}$, correspondiente a la rotación de un cuerpo rígido alrededor del eje z (véase el Ejemplo 2 de la Sección 15.1), no es conservativo si $\Omega \neq 0$.

Solución Hay dos formas de demostrar que no puede existir un potencial para \mathbf{v} . Una forma es intentar calcular un potencial $\phi(x, y)$ para el campo vectorial. Se requiere

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\Omega y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Omega x$$

La primera de estas ecuaciones implica que $\phi(x, y) = -\Omega xy + C_1(y)$ (hemos integrado con respecto a x ; el potencial puede depender todavía de y). De forma similar, la segunda ecuación implica que $\phi(x, y) = \Omega xy + C_2(x)$. Por tanto, debemos tener $-\Omega xy + C_1(y) = \Omega xy + C_2(x)$ o $2\Omega xy = C_1(x) - C_2(x)$ para todo (x, y) . Esto no es posible para ninguna elección de las funciones de una variable $C_1(y)$ y $C_2(x)$, a menos que $\Omega = 0$.

De forma alternativa, si \mathbf{v} tiene un potencial ϕ , entonces podemos formar las derivadas parciales mixtas de ϕ a partir de las dos ecuaciones anteriores y obtener

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = -\Omega \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \Omega$$

Esto no es posible si $\Omega \neq 0$ porque la suavidad de \mathbf{v} implica que su potencial debe ser suave, por lo que las derivadas parciales mixtas deben ser iguales. Por tanto, no puede existir ϕ ; \mathbf{v} no es conservativo.

El Ejemplo 2 sugiere una condición que debe cumplir cualquier campo vectorial conservativo en el plano.

Condición necesaria para un campo vectorial conservativo en el plano

Si $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en un dominio D del plano xy , entonces la condición

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$$

se debe cumplir en todos los puntos de D .

!! ATENCIÓN !!

No hay que confundir esta **condición necesaria** con una **condición suficiente** para garantizar que \mathbf{F} es conservativo. Más adelante demostraremos que es necesario algo más que $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$ en D para garantizar que \mathbf{F} es conservativo en D .

Para ver que esto es así, observemos que

$$F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} = \mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

implica las dos ecuaciones escalares

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

y como las derivadas parciales mixtas de ϕ deben ser iguales,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Se obtiene una condición similar para campos vectoriales en el espacio tridimensional.

Condiciones necesarias para un campo vectorial conservativo en el espacio tridimensional

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial conservativo en un dominio D en el espacio tridimensional, entonces en todo punto de D se debe cumplir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Superficies y curvas equipotenciales

Si $\phi(x, y, z)$ es una función potencial del campo vectorial conservativo \mathbf{F} , entonces las *superficies de nivel* $\phi(x, y, z) = C$ de ϕ se denominan **superficies equipotenciales** de \mathbf{F} . Como $\mathbf{F} = \nabla\phi$ es normal a estas superficies (allí donde no se anula), las líneas de campo de \mathbf{F} siempre cortan a las superficies equipotenciales formando ángulos rectos. Por ejemplo, las superficies equipotenciales del campo de fuerzas gravitatorio creado por una masa puntual son esferas centradas en el punto donde está la masa; estas esferas son normales a las líneas de campo, que son rectas que pasan por el punto donde está la masa. De forma similar, para un campo vectorial conservativo

en el plano, las *curvas de nivel* de la función potencial se denominan **curvas equipotenciales** del campo vectorial. Son las **trayectorias ortogonales** a las líneas de campo; es decir, cortan a las líneas de campo formando ángulos rectos.

Ejemplo 3 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es conservativo y calcule una función potencial de dicho campo. Describa las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

Solución Como $\partial F_1/\partial y = 0 = \partial F_2/\partial x$ en todo punto de \mathbb{R}^2 , podemos esperar que \mathbf{F} sea conservativo. Cualquier función potencial ϕ debe cumplir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = x \quad y \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = -y$$

La primera de estas ecuaciones permite obtener

$$\phi(x, y) = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C_1(y)$$

Obsérvese que, como la integral se toma con respecto a x , está permitido que la «constante» de integración dependa de la otra variable. Utilizamos ahora la segunda ecuación para obtener

$$-y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_1'(y) \Rightarrow C_1(y) = -\frac{1}{2} y^2 + C_2$$

Por tanto, \mathbf{F} es conservativo y, para cualquier constante C_2 ,

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + C_2$$

es una función potencial de \mathbf{F} . Las líneas de campo de \mathbf{F} cumplen

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + \ln C_2 \Rightarrow xy = C_3$$

Las líneas de campo de \mathbf{F} son, por tanto, hipérbolas rectangulares cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Las curvas equipotenciales forman otra familia de hipérbolas rectangulares, $x^2 - y^2 = C_4$, cuyas asíntotas son las rectas $x = \pm y$. Las curvas de las dos familias se cortan formando ángulos rectos (véase la Figura 15.5). Nótese, sin embargo, que \mathbf{F} no especifica una dirección en el origen y que la ortogonalidad se rompe allí; de hecho, ninguna familia tiene una única curva que pasa por ese punto.

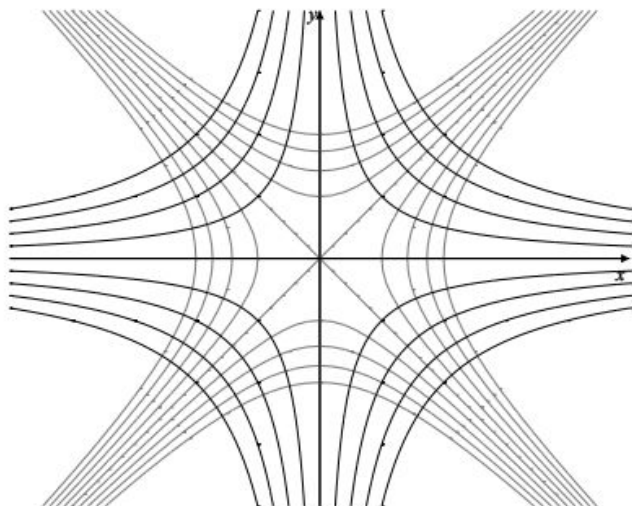


Figura 15.5 Líneas de campo (más oscuras) y curvas equipotenciales (más claras) del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Observación En el ejemplo anterior hemos obtenido el potencial ϕ integrando primero $\partial\phi/\partial x = F_1$. Podríamos haber empezado también integrando $\partial\phi/\partial y = F_2$, en cuyo caso la constante de integración habría dependido de x . Al final habríamos llegado al mismo valor de ϕ .

Ejemplo 4 Decida si el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (xy - \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}$$

es conservativo en $D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$, y calcule un potencial del mismo si lo es.

Solución Nótese que \mathbf{F} no está definido cuando $z = 0$. Sin embargo, como

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\cos z = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

\mathbf{F} puede ser todavía conservativo en dominios que no corten al plano xy en $z = 0$. Si esto se cumple, su potencial ϕ debe satisfacer

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = xy - \operatorname{sen} z, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z \quad (*)$$

A partir de la primera ecuación de (*),

$$\phi(x, y, z) = \int (xy - \operatorname{sen} z) dx = \frac{1}{2}x^2y - x\operatorname{sen} z + C_1(y, z)$$

Nótese de nuevo que la constante de integración puede ser una función de parámetros del integrando; sólo es constante con respecto a la variable de integración. Utilizando la segunda ecuación de (*), obtenemos

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y}$$

Así,

$$C_1(y, z) = - \int \frac{e^y}{z} dy = - \frac{e^y}{z} + C_2(z)$$

y

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - x\operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + C_2(z)$$

Finalmente, utilizando la tercera ecuación de (*),

$$\frac{e^y}{z^2} - x\cos z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -x\cos z + \frac{e^y}{z^2} + C_2'(z)$$

Por tanto, $C_2'(z) = 0$ y $C_2(z) = C$ (una constante). De hecho, \mathbf{F} es conservativo y, para cualquier constante C ,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - x\operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + C$$

es una función potencial de \mathbf{F} en el dominio dado D . C puede tener diferentes valores en las dos regiones $z > 0$ y $z < 0$, cuya unión constituye D .

Observación Si, en la solución anterior, en la ecuación diferencial de $C_1(y, z)$ hubiera intervenido x o si en la de $C_2(z)$ hubieran intervenido x o y , no habríamos podido calcular ϕ . Esto no ocurre debido a las tres condiciones sobre las derivadas parciales de F_1 , F_2 y F_3 verificadas desde el principio.

Observación La existencia de un potencial para un campo vectorial depende de la *topología* del dominio del campo (es decir, si el dominio tiene *huecos* en su interior y qué clase de huecos), así como de la estructura de los componentes del propio campo. Aunque se cumplan las condiciones necesarias dadas anteriormente, un campo vectorial puede no ser conservativo en un dominio que tenga *huecos*. Volveremos sobre la naturaleza de los campos vectoriales conservativos en la Sección 15.4 y en el capítulo siguiente; demostraremos finalmente que las *condiciones necesarias* anteriores son también *suficientes* para garantizar que \mathbf{F} es conservativo si el dominio de \mathbf{F} cumple ciertas condiciones. Sin embargo, en este punto, sólo presentaremos un ejemplo en el que un campo vectorial plano no es conservativo en un dominio donde las condiciones necesarias, sin embargo, se cumplen.

Ejemplo 5 Para $(x, y) \neq (0, 0)$, se define un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ y un campo escalar $\theta(x, y)$ como sigue:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

$\theta(x, y)$ es el ángulo en polares θ de (x, y) tal que $0 \leq \theta < 2\pi$.

Por tanto, $x = r \cos \theta(x, y)$ e $y = r \sin \theta(x, y)$, con $r^2 = x^2 + y^2$. Verifique lo siguiente:

- (a) $\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (b) $\nabla \theta(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $0 < \theta < 2\pi$.
- (c) \mathbf{F} no es conservativo en todo el plano xy excluyendo el origen.

Solución

- (a) Tenemos $F_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ y $F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (b) Diferenciamos implícitamente las ecuaciones $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned}$$

Eliminando $\partial r / \partial x$ de esta pareja de ecuaciones y despejando $\partial \theta / \partial x$ se llega a

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1$$

De forma similar, la diferenciación con respecto a y produce

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2$$

Estas fórmulas sólo se cumplen si $0 < \theta < 2\pi$; θ incluso no es continua en el eje x positivo; si $x > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \theta(x, y) = 0 \quad \text{pero} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \theta(x, y) = 2\pi$$

Por tanto, $\nabla \theta = \mathbf{F}$ se cumple en todo punto del plano, excepto en los puntos $(x, 0)$ donde $x \geq 0$.

- (c) Supongamos que \mathbf{F} es conservativo en todo el plano excepto en el origen. Entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ para alguna función escalar $\phi(x, y)$. Por tanto, $\nabla(\theta - \phi) = \mathbf{0}$ para $0 < \theta < 2\pi$, y $\theta - \phi = C$ (constante), o $\theta = \phi + C$. El miembro izquierdo de esta ecuación es discontinuo en el eje x positivo, pero el miembro derecho no lo es. Por tanto, los dos miembros no pueden ser iguales. Esta contradicción demuestra que \mathbf{F} no puede ser conservativo en todo el plano excluyendo el origen.

Observación Obsérvese que en el ejemplo anterior el origen $(0, 0)$ es un *hueco* en el dominio de \mathbf{F} . Aunque \mathbf{F} cumpla la condición necesaria para ser conservativo en todos los puntos excepto en este hueco, hay que eliminar del dominio de \mathbf{F} unas semirrectas (rayos) o, de forma más general, una curva desde el origen hasta el infinito, para obtener la función potencial de \mathbf{F} . \mathbf{F} no es conservativo en ningún dominio que contenga una curva que rodee al origen. Los Ejercicios 22-24 de la Sección 15.4 arrojarán más luz sobre esta situación.

Fuentes, sumideros y dipolos

Imagine que el espacio tridimensional está relleno con un fluido incompresible emitido por una fuente puntual en el origen, con una velocidad de volumen de $dV/dt = 4\pi m$ (se dice que el origen es una **fente** de fuerza m). Por simetría, el fluido fluye hacia afuera siguiendo líneas radiales desde el origen, con igual velocidad a igual distancia del origen en todas las direcciones, y el fluido emitido en el origen en algún instante $t = 0$ se habrá dispersado en el instante t sobre una superficie esférica de radio $r = r(t)$. Todo el fluido en el interior de esa esfera ha sido emitido en el intervalo temporal $[0, t]$, por lo que tenemos

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi mt$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t se obtiene $r^2(dr/dt) = m$, y la velocidad del fluido hacia el exterior a una distancia r del origen es $v(r) = m/r^2$. El campo de velocidades del fluido en movimiento es, por tanto,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

Este campo de velocidades es conservativo (excepto en el origen) y su potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{r}$$

Un **sumidero** es una fuente negativa. Un sumidero de fuerza m en el origen (que aniquila o absorbe fluido con una velocidad de $dV/dt = 4\pi m$) tiene un campo de velocidades y un potencial dados por

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{m}{r}$$

Los potenciales o los campos de velocidades de fuentes o sumideros localizados en otros puntos se obtienen por traslación de estas fórmulas; por ejemplo, el campo de velocidades de una fuente de fuerza m en un punto cuyo vector de posición es \mathbf{r}_0 , es

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) = \frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Es interesante comparar esto con el campo gravitatorio de una masa m situada en el origen. Las dos cosas son lo mismo, exceptuando un signo y una constante relacionada con las unidades de medida. Por esta razón, podemos ver una masa puntual como una fuente de su propio campo gravitatorio. De forma similar, el campo electrostático debido a una carga puntual q situada en \mathbf{r}_0

es el campo de una fuente (o sumidero si $q < 0$) de fuerza proporcional a q . Si se escogen las unidades de medida adecuadas tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

En general, las líneas de campo de un campo vectorial convergen a una fuente o sumidero de dicho campo.

Un **dipolo** es un sistema formado por una fuente y un sumidero de fuerzas iguales m separados una distancia corta ℓ . El producto $\mu = m\ell$ se denomina **momento dipolar**, y la recta que contiene la fuente y el sumidero se denomina **eje** del dipolo. Los dipolos físicos reales, como los imanes, se modelan frecuentemente como dipolos ideales, que son los límites de los dipolos reales cuando $m \rightarrow \infty$ y $\ell \rightarrow 0$, de forma que el momento dipolar μ permanece constante.

Ejemplo 6 Calcule el campo de velocidades, $\mathbf{v}(x, y, z)$, asociado a un dipolo de momento μ situado en el origen y cuyo eje coincide con el eje z

Solución Comenzamos con una fuente de fuerza m en la posición $(0, 0, \ell/2)$ y un sumidero de fuerza m en $(0, 0, -\ell/2)$. El potencial de este sistema es

$$\phi(\mathbf{r}) = -m\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}\right)$$

El potencial del dipolo inicial es el límite del potencial de este sistema cuando $m \rightarrow \infty$ y $\ell \rightarrow 0$ de forma que $m\ell = \mu$:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \lim_{\substack{\ell \rightarrow 0 \\ m\ell = \mu}} -m\left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}\right) \\ &= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}| - |\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}{\ell}\end{aligned}$$

Ahora utilizamos la Regla de l'Hôpital y la regla para diferenciar módulos de vectores:

$$\begin{aligned}&= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\frac{(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{2}\mathbf{k}}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|} - \frac{(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}) \cdot (-\frac{1}{2}\mathbf{k})}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}}{1} \\ &= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \lim_{\ell \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\ell}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|} + \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\ell}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}\right) \\ &= -\frac{\mu z}{|\mathbf{r}|^3}\end{aligned}$$

El campo de velocidades requerido es el gradiente de este potencial. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{3\mu z}{|\mathbf{r}|^4} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{r}|} = \frac{2\mu xz}{|\mathbf{r}|^5} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{3\mu yz}{|\mathbf{r}|^5} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3\mu z^2}{|\mathbf{r}|^5} = \frac{\mu(2z^2 - x^2 - y^2)}{|\mathbf{r}|^5} \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^5} (3xz\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + (2z^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k})\end{aligned}$$

La Figura 15.6 muestra algunas líneas de corriente en una sección cruzada plana que contiene al eje z

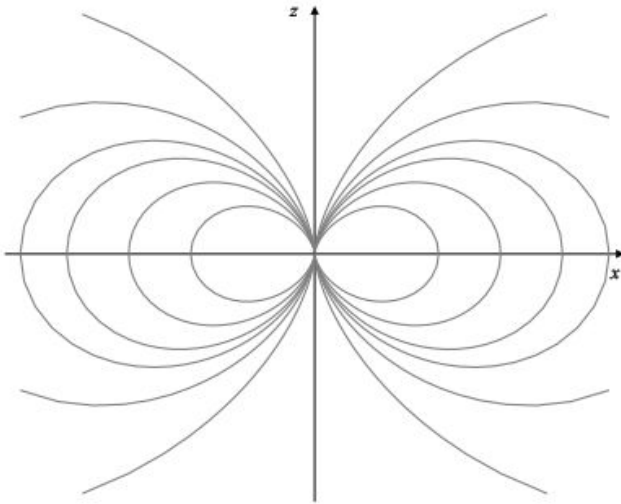


Figura 15.6 Líneas de corriente de un dipolo.

Ejercicios 15.2

En los Ejercicios 1-6, determine si los campos vectoriales dados son conservativos, y calcule un potencial si lo son.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

7. Calcule el campo vectorial tridimensional cuyo potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}$$

8. Calcule $\nabla \ln|\mathbf{r}|$, siendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

9. Demuestre que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

es conservativo, y calcule su potencial. Describa las superficies equipotenciales. Calcule las líneas de campo de \mathbf{F} .

10. Repita el Ejercicio 9 para el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} + \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)\mathbf{k}$$

11. Calcule el campo de velocidades debido a dos fuentes de fuerza m , una de ellas localizada en $(0, 0, \ell)$ y la otra en $(0, 0, -\ell)$. ¿Dónde se anula la velocidad? Calcule la velocidad en cualquier punto $(x, y, 0)$ del

plano xy . ¿Dónde es máxima la velocidad en el plano xy ?

*12. Calcule el campo de velocidades de un sistema formado por una fuente de fuerza 2 en el origen y un sumidero de fuerza 1 en $(0, 0, 1)$. Demuestre que la velocidad es vertical en todos los puntos de una cierta esfera. Dibuje las líneas de corriente del flujo.

Los Ejercicios 13-18 presentan un análisis de fuentes y dipolos bidimensionales similar al realizado para tres dimensiones en el texto.

13. En un espacio tridimensional relleno con un fluido incompresible, se dice que el eje z es una **fuerza de líneas** de fuerza m si todo intervalo Δz sobre ese eje emite fluido con una velocidad de volumen $dV/dt = 2\pi m \Delta z$. El fluido se expande de forma no simétrica en todas las direcciones perpendiculares al eje z . Demuestre que el campo de velocidades del flujo es

$$\mathbf{v} = \frac{m}{x^2 + y^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

14. El flujo del Ejercicio 13 es bidimensional porque \mathbf{v} depende sólo de x e y , y no tiene componente en la dirección de z . Considerado como un campo vectorial *plano*, es el campo de una fuente puntual tridimensional de fuerza m situada en el origen (es decir, el origen emite fluido con una velocidad de área $dA/dt = 2\pi m$). Demuestre que el campo vectorial es conservativo y calcule una función potencial $\phi(x, y)$ para dicho campo.

*15. Calcule el potencial ϕ y el campo $\mathbf{F} = \nabla\phi$ de un dipolo bidimensional situado en el origen, cuyo eje

está en la dirección de y , y cuyo momento dipolar es μ . Este dipolo es el límite de un sistema formado por una fuente de fuerza m situada en $(0, \ell/2)$ y un sumidero de fuerza m situado en $(0, -\ell/2)$, cuando $\ell \rightarrow 0$ y $m \rightarrow \infty$ de forma que $m\ell = \mu$.

- *16. Demuestre que las curvas equipotenciales del dipolo bidimensional del Ejercicio 15 son circunferencias tangentes al eje x en el origen.
- *17. Demuestre que las líneas de corriente (líneas de campo) del dipolo bidimensional de los Ejercicios 15 y 16 son circunferencias tangentes al eje y en el origen. *Sugerencia:* Es posible demostrarlo geoméricamente. Si se realiza planteando una ecuación diferencial, hay que encontrar el cambio de la variable dependiente

$$y = vx \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

adecuado para integrar la ecuación.

- *18. Demuestre que el campo de velocidades de una fuente de líneas de fuerza $2m$ se puede obtener integrando en todo el eje z el campo de velocidades (tridimensional) de una fuente puntual de fuerza $m dz$ situada en $(0, 0, z)$. ¿Por qué corresponde la integral a una fuente lineal de fuerza $2m$ en vez de fuerza m ? ¿Se puede obtener el potencial de la fuente lineal integrando los potenciales de las fuentes puntuales?

19. Demuestre que el gradiente de una función expresada en términos de coordenadas polares en el plano es

$$\nabla \phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Este ejercicio es una repetición del Ejercicio 16 en la Sección 12.7.

20. Utilice el resultado del Ejercicio 19 para demostrar que una condición necesaria para que el campo vectorial, expresado en coordenadas polares,

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

sea conservativo es que

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta$$

21. Demuestre que $\mathbf{F} = r \sin 2\theta \hat{\mathbf{r}} + r \cos 2\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ es conservativo, y calcule un potencial del campo.
22. Calcule para qué valores de las constantes α y β es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = r^2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \alpha r^\beta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Calcule un potencial de \mathbf{F} si α y β tienen los valores calculados.

15.3 Integrales sobre curvas

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ representa la *cantidad total* de una magnitud distribuida a lo largo del eje x , entre a y b , de acuerdo con un valor de *densidad lineal* $f(x)$ de dicha magnitud en el punto x . La cantidad de magnitud en un intervalo *infinitesimal* de longitud dx situado en x es $f(x) dx$, y la integral realiza las sumas de esas contribuciones (o *elementos*) infinitesimales, para obtener la cantidad total de magnitud. De forma similar, las integrales $\iint_D f(x, y) dA$ y $\iiint_R f(x, y, z) dV$ representan las cantidades totales de magnitudes distribuidas en regiones D del plano y R del espacio tridimensional, en función de las densidades de *área* o de *volumen* de esas magnitudes.

Puede ocurrir que una magnitud esté distribuida con una densidad lineal especificada en una *curva* en el plano o del espacio tridimensional, o con una densidad de área especificada en una *superficie* del espacio tridimensional. En estos casos es necesario utilizar *integrales sobre curvas* o *integrales sobre superficies* para sumar las contribuciones elementales y calcular la magnitud total. En esta sección y en la siguiente trataremos las integrales sobre curvas, y en las Secciones 15.5 y 15.6 las integrales sobre superficies.

Sea \mathcal{C} una curva paramétrica continua y acotada en \mathbb{R}^3 . Recuérdese (de la Sección 11.1) que \mathcal{C} es una *curva suave* si tiene una parametrización de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \text{ en el intervalo } I$$

con vector «velocidad» $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ continuo y distinto de cero. Denominaremos a \mathcal{C} **arco suave** si es una curva suave con intervalo de parámetros *finito* $I = [a, b]$.